Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2002

Delfim Fernando Marado Torres

Regularidade dos Minimizantes no Cálculo das Variações e Controlo Óptimo

"Amar, inventar, admirar,
eis a minha vida."

—Alfred de Vigny

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2002

Delfim Fernando Marado Torres

Regularidade dos Minimizantes no Cálculo das Variações e Controlo Óptimo

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática. Trabalho realizado sob a orientação científica do Prof. Doutor Andrey Sarychev, Professor Catedrático no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2002

Delfim Fernando Marado Torres

Regularity of Minimizers in the Calculus of Variations and Optimal Control

Thesis presented to the University of Aveiro in partial fulfillment of the requirements for the degree *Doctor of Philosophy* in Mathematics. Scientific Supervision by Professor Andrey Sarychev, Full Professor at the Department of Mathematics of the University of Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president — Reitora da Universidade de Aveiro

vogais / examiners committee

Fernando Manuel Ferreira Lobo Pereira
Professor Associado da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Maria de Fátima da Silva Leite
Professora Associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Vasile Staicu
Professor Associado com Agregação da Universidade de Aveiro

Andrey Sarychev
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro (Orientador)

agradecimentos

"Research means going out into the unknown with the hope of finding something new to bring home. If you know what you are going to do, or even to find there, then it is not research at all, then it is only a kind of honourable occupation."

—Albert Szent-Györgyi

Durante a minha investigação para doutoramento, o Professor Doutor Andrey Sarychev foi meu supervisor, orientador, mentor e amigo. Foi um parceiro fiável na sugestão de tópicos de pesquisa e no julgamento da relevância e correcção da minha investigação. Nunca tentou forçar o meu trabalho nas direcções dos seus próprios interesses principais, deixando as preferências comigo. Tenho consciência que as condições e possibilidades que me proporcionou foram um privilégio e uma raridade. Foi com ele que aprendi a publicar com sensatez; a descobrir constantemente; a viajar, aprendendo sobre assuntos fora e dentro do meu campo de investigação e a conhecer colegas matemáticos; a falar de matemática com entusiasmo e paixão; a fazer da Matemática parte da minha vida, não apenas como um trabalho mas como uma profissão. Nunca esquecerei todo o apoio que me prestou; a tolerância, paciência e amizade que sempre mostrou; as sugestões, críticas e disponibilidade constante; e o modo eficaz e estimulante como me encaminhou. A ele o meu profundo reconhecimento e um eterno obrigado.

Agradeço à Universidade de Aveiro, em particular ao Departamento de Matemática, Laboratório de Cálculo, Pavilhão Gimnodesportivo, Biblioteca e Serviços de Documentação, as excelentes condições que me proporcionaram, o amável acolhimento que me dispensaram e todas as facilidades que me disponibilizaram, incluindo o apoio material, logístico e humano.

Ao *Nonlinear Control Network* (European TMR Research Network ERB-4061-PL-97), em especial à Professora Doutora Fátima da Silva Leite, e à Unidade de Investigação Matemática e Aplicações da Universidade de Aveiro, agradeço o suporte financeiro das minhas deslocações e os contactos científicos com investigadores de topo que me proporcionaram, nas áreas da tese e afins, com os quais tive o prazer de discutir e trocar impressões.

Embora não possa, por restrições de espaço, citar todos os que me ajudaram, com conversas e com o partilhar de ideias, em matemática e não só, permitam-me, mesmo assim, citar alguns nomes. Os outros desculpar-me-ão, estou certo, pela omissão. Agradeço então aos membros do newsgroup `sci.math.research`, em especial a Dave Rusin, David Ullrich, David Williams, Emanouil Atanassov, Ilias Kastanas, Paul Szeptycki, Robert Israel e Silvio Martin, aos membros dos grupos de Optimização e de Teoria Matemática do Controlo, aos meus colegas do Departamento de Matemática, ao Alexander Plakhov, à Ana Ribeiro, Andrey Agrachev, Andrey Sarychev, António Caetano, Arrigo Cellina, Arturo Gutiérrez, Batel Anjo, Carlota Rebelo, Cristina Ciocci, Cristina Pignotti, David Vieira, Denis Bonheure, Domingos Cardoso, Elena Mul, Elsa Carvalho, Elsa Lemos, Emmanuel Trélat, Eugénio Rocha, Fernando Fontes, Fernando Lobo Pereira, Francesca Ceragioli, Francis Clarke, Gianna Stefani, Graça Carita, Helmuth Malonek, Isabel Caiado, João Carmona, Joaquín Cervera, Katarina Jegdic, Lígia Abrunheiro, Lio Gonçalves, Luís Filipe Castro, Luís Sanchez, Madalena Chaves, Manuel Guerra, Margarida Camarinha, Margarida Ferreira, Miguel Filgueiras, Paula Rama, Pedro Guerreiro, Pedro Rangel Henriques, Peter Wolenski, Roger Sargent, Rosário Pinho, Sandra Ricardo, Sebastian Jacquet, Ugo Boscain, Vasile Staicu, Velimir Jurdjevic, Vítor Neves, Zvi Artstein.

Agradeço também a amizade, entusiasmo e apoio dos meus familiares e amigos, nomeadamente aqueles que estiveram envolvidos nos "projectos paralelos" que nasceram e cresceram com o doutoramento: Concursos de Programação, Antropologia, Literatura, Yoga, Tai Chi Chuan, Atletismo, etc. Ao *Old Friends*, berço de muita da matemática desta tese, ergo a minha taça também.

Pelo Amor, carinho e tudo o resto que me deram, agradeço aos meus Pais e Irmãos; à Beta, também pelo que compartilhámos e por ter estado presente, de coração e alma, em todas as linhas de todas as páginas.

Esta tese traz consigo vários anos de trabalho, persistência, esperanças, alegrias e decepções. A todos os que, ao longo deste processo, me fizeram crescer como matemático e ser humano, o meu comovido obrigado.

PRODEP III
5.3/C/200.009/2000

Comunidade Europeia

Fundo Social Europeu

resumo

Desenvolvemos uma abordagem unificada ao estudo da regularidade Lipschitziana das trajectórias minimizantes no cálculo das variações e controlo óptimo. Começamos por estender o primeiro teorema de Noether a problemas de controlo óptimo, permitindo a construção de leis de conservação para as extremais de Pontryagin, a partir de simetrias generalizadas dos problemas. Estabelecemos depois os primeiros resultados encontrados na literatura, concernentes à regularidade Lipschitziana para problemas do controlo óptimo com dinâmica não linear. Mesmo para o caso de dinâmica linear, como sejam os problemas do cálculo das variações, quer a nossa generalização do teorema da simetria de Noether, quer os nossos resultados de regularidade, estendem os resultados anteriormente conhecidos. Parte dos resultados da tese foram sendo apresentados pelo autor à comunidade científica em conferências internacionais, *vide verbi gratia* [282, 283, 270, 276, 266, 271, 273], e na forma de "research reports": [281, 264, 265, 268, 267, 272, 274, 269]. Alguns dos resultados já foram publicados em revistas internacionais: [217, 218, 275, 270]. Outros estão submetidos/aceites para publicação [277, 279, 280, 278].

Palavras Chave. cálculo das variações, controlo óptimo, teoremas tipo Noether, leis de conservação, primeiros integrais, quasi-invariância, teoremas de existência, princípio do máximo de Pontryagin, sistemas de controlo não lineares, controlos óptimos limitados, regularidade Lipschitziana das trajectórias minimizantes.

abstract

In this Ph.D. thesis a new approach to Lipschitzian regularity of the minimizing trajectories to problems of the calculus of variations and optimal control is developed. The author also generalizes the classical Noether's symmetry theorem (first Noether theorem) to invariant optimal control problems, by extending the very concept of *invariance* of the problem. The result relates the quasi-symmetries of the problems with the conservation laws for the Pontryagin extremals. With the help of such conservation laws, the first results in the literature, regarding Lipschitzian regularity of the minimizing trajectories for optimal control problems with nonlinear dynamics, are obtained. Even for problems with linear dynamics, such as those of the calculus of variations, our results are new and able to cover new situations not treated before. Some results of the thesis are available in the english language. See the research reports [281, 264, 265, 268, 267, 272, 274, 269], the extended abstracts [282, 283], the refereed conference proceedings [276, 266, 271, 273], and the refereed journals [217, 218, 275, 270]. The following papers are submitted or accepted for publication: [277, 279, 280, 278].

Key Words. calculus of variations, optimal control, Noether type theorems, conservation laws, first integrals, invariance up to an exact differential, invariance up to first-order terms in the parameters (quasi-invariance), existence theorems, Pontryagin maximum principle, nonlinear control systems, boundedness of optimal controls, Lipschitzian regularity of the minimizing trajectories.

2000 Mathematics Subject Classification. 49 (calculus of variations and optimal control, optimization): 49J15, 49J30, 49K15, 49K30, 49N60, 49N99, 49S05.

À Vânia

Índice

“If you don’t read poetry how the hell can you solve equations?”

—Harvey Jackins

“Man cannot advance without romance and poetry.”

—Vladimir Tikhomirov

Diário de doutoramento

hoje
sou eu um copo de éter
onde os insectos depositaram
as últimas esperanças

hoje
navega em mim próprio um ácido
enclausurado nas ervas
nas veredas
nos cacarejos infindáveis da gente

hoje os meus braços
cometeram
o pecado árduo de repousarem
caídos às portas de todos os cinemas

hoje
a lâmpada é um pedaço aquecido de mim
e é hoje que morro
na posição exacta de ontem
aceso de um maravilhado sopro
de asas

hoje percorro brando
a epiderme branca do sono
quase refúgio
de uma última estrela

hoje
o meu mergulho
ri-se muito
como se o mistério das flores morasse
no interior dos dentes

....

hoje
a força telúrica das aves
anda-me nos dedos

—Pedro Águas

Introdução

"[...] regularity theory for the optimal control problem, outside very special situations where it can be reduced to the basic problem in the calculus of variations, is, to date, a completely undeveloped area of research."

—Francis Clarke & Richard Vinter

"[...] much work remains to be done for descendants of the basic problem, such as those involving control dynamics: perhaps centuries worth."

—Francis Clarke

Durante mais de três séculos, o cálculo das variações desempenhou um papel central, quer no desenvolvimento da matemática, quer no desenvolvimento da física. Permanece, ainda hoje, em pleno século XXI, relevante e útil, continuando a gerar questões profundas e interessantes e a admitir progresso em questões fundamentais.

As primeiras condições necessárias de optimalidade e os primeiros resultados de existência no cálculo das variações, estão separados no tempo por mais de um século. O formalismo baseado nas condições necessárias (por exemplo as equações de Euler-Lagrange, as condições de Erdmann, de DuBois-Reymond, de Legendre ou de Weierstrass), assume, *à priori*, a existência de um minimizante (local). As condições necessárias em optimização são, por isso, inúteis, se a solução de que falamos não existir. De facto, se ela não existe, podemos ser levados a tirar uma conclusão errada a partir de uma condição necessária correcta. Este facto é bem ilustrado com o chamado paradoxo de Perron (cf. [307, § 10]):

> Uma condição necessária para N ser o maior inteiro positivo é que $N = 1$. Com efeito, se $N \neq 1$ então $N^2 > N$ e N não é, contrariamente à definição, o maior inteiro. Por conseguinte, $N = 1$.

Prova-se assim o teorema: "Se N é o maior inteiro, então $N = 1$." Claro que não existe nada de errado nesta afirmação. Ela é correcta, excepto que a hipótese nunca é satisfeita. Este exemplo, com aparência de anedota, dá-nos uma importante lição, chamando a atenção para o facto do *método dedutivo* em optimização (dedutivo: do geral para o particular) avançar no pressuposto que uma solução para o problema existe:

- sabemos que existe uma solução para o problema;
- aplicação das condições necessárias identificam os candidatos a óptimo;
- entre os candidatos, o "melhor" é encontrado por comparação e eliminação.

A presença do primeiro elo na cadeia de raciocínio do método dedutivo acima exposto, não sendo salientada muitas vezes em optimização; sendo tratado de uma maneira completamente *ad hoc* em muitos exemplos clássicos do cálculo das variações; é consideravelmente subtil em optimização dinâmica, onde problemas de aspecto inocente não admitem soluções no espaço de funções onde as condições necessárias são válidas (cf. [263, Sec. 2.1], [187]). Se o uso de um teorema da existência é, de um modo lógico, um prelúdio para invocar condições necessárias, é de facto curioso, como diz L. C. Young em [307, p. 23], que tão elementar questão lógica tenha passado despercebida durante cerca de dois séculos! A verdade, como veremos, é que uma teoria satisfatória de existência não podia ser desenvolvida até certos conceitos matemáticos, como a integração de Lebesgue, estarem disponíveis... Para uma resenha do que foi chamada a *teoria naive*[1] do cálculo das variações, que cobre aproximadamente o período 1696–1900, e que foi marcada pelas contribuições de Jakob e Johann Bernoulli, Euler, Lagrange, Legendre, Hamilton, Jacobi, Weierstrass e Hilbert, entre outros, remetemos o leitor para [122] ou [143, Cap. 3].

Foi apenas no final do século XIX, princípio do século XX, que a questão da existência para os problemas do cálculo das variações foi deliberado. No século XIX pensava-se que todo o problema do cálculo das variações, com Lagrangeano não negativo, tinha mínimo. Riemann, a partir de tal crença improcedente e a respeito do seu famoso princípio de Dirichlet, obteve uma série de resultados importantes em Análise, como a existência de funções harmónicas num domínio limitado com valores de fronteira prescritos. O primeiro a criticar o argumento de Riemann, e o *método naive* de Euler-Lagrange, foi Weierstrass. Tais críticas deram origem à discussão das próprias fundações da Análise, com Arzelà, Ascoli, Dini, Schwartz, Peano e Hilbert a tomaram parte extremamente activa (cf. [53]). Arzelà foi o primeiro a tentar, empenhadamente, mas sem sucesso, obter uma prova directa da existência de mínimo para o integral de Dirichlet. Hilbert, em 1900, obteve tal prova directa, ainda que a sua demonstração confiasse em propriedades específicas das funções harmónicas. Estas ideias foram seguidas com entusiasmo por Levi, Lebesgue e Fubini. Entretanto Baire, em 1905, introduziu o conceito de função semicontínua inferior para funções de valor real, mostrando que, num domínio compacto, as funções semicontínuas inferiores admitem mínimo global. Leonida Tonelli foi o primeiro a perceber que os teoremas de compacidade de Ascoli-Arzelà e a semicontinuidade de Baire, transferidos das funções de valor real para as funcionais do cálculo das variações, eram as ferramentas perfeitas para um *método directo* de existência de máximos e mínimos no cálculo das variações. Tonelli descreveu, em 1911 [248], uma tal teoria geral de existência para o problema fundamental do cálculo das variações, identificando o espaço $W_{1,1}$ das funções absolutamente contínuas, i.e., aquelas funções $x(\cdot)$ para as quais

[1] *Naive* porque se assume *à priori* que uma solução existe. A designação é de Young [307].

existe uma função integrável à Lebesgue $v(\cdot)$ tal que $x(t) = x(a) + \int_a^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$, $a \le t \le b$,[2] como sendo a classe consentânea na qual se pode (de um "modo razoável") esperar existir um minimizante (além de [248], vejam-se também os artigos de Tonelli [251, 253, 254]). O resultado, estabelecido por aplicação do agora famoso *método directo* – a sucessão minimizante converge (compacidade fraca); o limite está no conjunto para o qual a funcional está a ser minimizada (completude); o valor da funcional no limite não é maior que o ínfimo (semicontinuidade inferior fraca) – é obtido impondo condições apropriadas de continuidade, convexidade e coercividade ao Lagrangeano. O método de Tonelli é um método geral – aplicado facilmente a problemas isoperimétricos, com derivadas de ordem superior, a problemas do cálculo das variações com integrais múltiplos, a problemas do controlo óptimo, etc. (cf. [250, 249, 252, 255, 257, 260, 52, 53, 39]) – constituindo hoje um capítulo importante da análise funcional, que tanto contribuiu para a mudança drástica na atitude e compreensão do cálculo das variações que se operou no início do século XX. Não é difícil, sob as condições de continuidade, convexidade e coercividade que garantem a existência de mínimo, construir exemplos para os quais o mínimo numa subclasse de $W_{1,1}([a, b])$, como por exemplo a subclasse $W_{1,\infty}([a, b])$ das funções Lipschitzianas (formada pelas funções $x(\cdot)$ que satisfazem uma condição de Lipschitz em $[a, b]$: para alguma constante k, para todo o t_1 e t_2 em $[a, b]$ tem-se $\|x(t_1) - x(t_2)\| \le k\,|t_1 - t_2|$),[3] não é atingido – um minimizante absolutamente contínuo existe, mas possui derivada ilimitada.

Se por um lado a teoria de Tonelli resolveu essencialmente a questão da existência, ela veio gerar novas questões acerca da validade das condições necessárias de optimalidade tradicionais, exemplo das quais é a famosa equação de Euler-Lagrange. Tonelli conjecturou [256], enquanto Clarke e Vinter verificaram em [67], para um exemplo proposto por Ball e Mizel em [19], que certas ocorrências do problema fundamental do cálculo das variações, satisfazendo as hipóteses de existência de Tonelli, tinham minimizantes com derivada não limitada, para os quais a equação de Euler-Lagrange não era verificada. Este facto salientou a diferença relevante entre as hipóteses dos teoremas da existência e os requisitos sob os quais as condições necessárias usuais são aplicáveis. É por esta razão que qualquer parte do cálculo das variações (ou do controlo óptimo) que se baseie em alegadas condições necessárias, não suportadas por uma qualquer teoria geral de existência e de regularidade,[4] fica incompleta e só pode ser qualificada de *naive*. Em princípio, tais condições necessárias podem sofrer do paradoxo de Perron e, a menos de uma demonstração que elas conduzem de facto às soluções desejadas, o

[2]Segue-se que $\dot{x}(t) = v(t)$ em quase todos os pontos ($q.t.p.$) de $[a, b]$ ($\dot{x}$ é sinónimo de $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$). Lembramos que na altura a teoria de integração de Lebesgue [151] era uma teoria recente. Uma tradução, em português, do artigo [152] de Henri Lebesgue, pode ser encontrada em [153].

[3]A condição é equivalente à necessidade de $\dot{x}(\cdot)$ ser essencialmente limitada.

[4]Chamamos resultado de *regularidade* a qualquer asserto de que a solução pertence a uma classe de funções mais restrita do que aquela considerada à partida (e.g., $W_{1,\infty}$ em vez de $W_{1,1}$) (cf. [263, Cap. 3]).

seu valor é meramente heurístico. É esta a fraqueza, séria, da teoria *naive*: mesmo quando as condições necessárias identificam unicamente uma função $x(\cdot)$, isso não implica que $x(\cdot)$ seja solução do problema! É necessário, então, garantir em primeiro lugar a existência de uma solução do problema numa subclasse das funções absolutamente contínuas para a qual as condições necessárias são válidas. A maior subclasse com esta propriedade é a das funções Lipschitzianas (cf. [263, Teorema 10]). Sob certas condições adicionais, a regularidade Lipschitziana implica regularidade C^1 ou mesmo regularidade C^2 (cf. [263, Teoremas 40 e 48], [76, §4.1.3]).

A importância da regularidade Lipschitziana dos minimizantes, é ainda reforçada pelo facto da precisão das aproximações, obtidas por métodos de discretização, depender da regularidade das soluções (cf. [12, 100]). A regularidade Lipschitziana exclui situações indesejáveis que levantam inúmeros problemas à aplicação de métodos numéricos para averiguação dos minimizantes (cf. [20, 294, 213]). Um tal exemplo, relevante nas ciências dos materiais, que se encontra ligado a fenómenos de fractura (cf. [301, 174]) e a propriedades de repulsão e formação de cavidades (cf. [18]), é o fenómeno de Lavrentiev. Este fenómeno ocorre quando um minimizante absolutamente contínuo, com derivada não limitada, não pode ser aproximado, pelo valor da funcional, por uma sucessão de funções Lipschitzianas, já que o ínfimo na classe das funções absolutamente contínuas é estritamente menor que o ínfimo na classe mais restrita das funções Lipschitzianas (cf. [263, Sec. 3.3]). Este fenómeno foi estabelecido por M. Lavrentiev em 1927 (*vide* [150]), motivado por uma observação de Leonida Tonelli de 1922 e em resposta a um desafio directo de Tonelli numa palestra de 1926 em Moscovo (cf. [53, 175]). Este fenómeno, anacrónico à primeira vista, pelo facto da classe das funções Lipschitzianas ser densa no espaço das funções absolutamente contínuas, pode surgir, no entanto, mesmo quando o Lagrangeano é um polinómio (cf. [168]), sendo um fenómeno ubíquo (cf. [215, 174]) e um assunto proeminente, onde muitos matemáticos têm contribuído (cf. [41, 175]).

Vejamos a relevância do fenómeno de Lavrentiev num procedimento de aproximação bem conhecido, por exemplo o método de Rayleigh-Ritz (cf. v.g. [93, Cap. 10], [106, Cap. 7], [133, §2.19], [201, Cap. 6], [99]). O método procura obter a função minimizante (ou maximizante) entre as funções $x(\cdot)$ exprimíveis na forma

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \phi_i(t) \, , \quad t \in [a, b] \, ,$$

onde $x_0(\cdot)$ é uma função dada, satisfazendo as condições de fronteira, e $\phi_1(\cdot), \ldots, \phi_N(\cdot)$ é uma família de funções *completa* com valores nulos em a e b. A palavra *completa* refere-se a certas propriedades da aproximação, tais como as impostas pelo teorema de Stone-Weierstrass. Um exemplo típico é a família definida por $\phi_i(t) = (t-a)(t-b)t^{i-1}$. Para N fixo, o problema de minimização consiste em escolher os valores óptimos de $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$; i.e., trata-se de um problema em $\mathbb{R}^N$, que pode ser abordado pelos métodos convencionais. A ideia é que para N suficientemente grande, o ínfimo deste problema aproximará o problema original na classe das funções absolutamente contínuas, onde sabemos que uma solução existe. Uma vez que apenas elementos da classe das funções Lipschitzianas são considerados, a esperança de aproximar o minimizante está, de um modo geral, condenada, uma vez que o fenómeno de Lavrentiev pode ocorrer. Para uma discussão detalhada sobre o papel da escolha do espaço de funções, e do facto dos métodos numéricos standard poderem falhar no cálculo do valor mínimo para problemas do cálculo das variações, remetemos o leitor para [18].

Embora L. Tonelli seja mais conhecido pelo processo que conduz aos teoremas da existência, ele contribuiu também, de maneira essencial, para a questão da regularidade das soluções óptimas e condições necessárias, devendo-se a ele os primeiros resultados de regularidade Lipschitziana no cálculo das variações (cf. [258, 259, 261, 262, 59, 60]). Estes resultados mereceram uma secção em [91] intitulada *"O que sabia Tonelli que nós esquecemos?"*. Outros resultados clássicos, igualmente olvidados por algum tempo, são devidos a C. B. Morrey (cf. [181]) e S. Bernstein [27]. Durante um período de mais de 60 anos, possivelmente pela dificuldade aparente em obter respostas efectivas, o assunto da regularidade Lipschitziana dos minimizantes esteve extinto. Foi em meados dos anos 80, aquando da evidência da relevância de tais questões na mecânica do contínuo (cf. [91]) e juntamente com o crescer de interesse na análise não suave (cf. [59, 63]), que se assistiu a um renascimento da atenção no estudo da regularidade Lipschitziana dos minimizantes. Os maiores esforços vieram de F. H. Clarke e R. B. Vinter que, defendendo o papel essencial da análise não suave e a inevitabilidade das suas técnicas, estudaram intensivamente o problema fundamental do cálculo das variações, generalizando os resultados clássicos e demonstrando novos resultados (cf. [59], [61, Cap. 2], [295, Cap. 11]). A partir desta altura, motivados pelos avanços de Clarke e Vinter, vários matemáticos dirigiram a sua atenção para a obtenção de condições de regularidade Lipschitziana para os minimizantes do problema fundamental do cálculo das variações. Hoje a literatura é vasta. Salientamos os seguintes artigos: [69, 68, 70, 78, 79, 66, 11, 64, 65, 241, 242, 243].

Já os problemas do cálculo das variações com derivadas de ordem superior receberam muito menos atenção, sendo os resultados de regularidade uma autêntica raridade. As condições disponíveis resumem-se essencialmente aos resultados obtidos por Clarke e Vinter em [72], mais uma vez por recurso às técnicas da análise não suave. Estes problemas apresentam dificuldades não presentes no caso de primeira ordem (cf. [215]), o que torna o estudo da regularidade ainda mais difícil. Uma nova abordagem à regularidade Lipschitziana dos minimizantes no cálculo das variações, usando métodos do controlo óptimo, foi proposta pelo autor deste trabalho em [263, Parte Original]. O controlo óptimo, ao proporcionar um novo ponto de vista para os problemas do cálculo das variações, mostrou-se muito efectivo, quer no tratamento do problema fundamental do cálculo das variações quer no estudo dos problemas variacionais com derivadas de ordem superior, propiciando resultados mais abrangentes (*vide* [263, Teorema 51, Exemplo 52, Teorema 53], [217, § 4]). Mais importante, o mesmo *modus operandi* revelou-se estendível a problemas mais gerais do controlo óptimo (*vide* [217]).

O formalismo do controlo óptimo, especialmente a distinção entre funções de estado e de controlo, foi introduzido no período a seguir à II guerra mundial, em resposta a inúmeros problemas de optimização em engenharia que eram naturalmente expressos nesta forma. A teoria matemática do controlo óptimo avançou sob formas várias, uma das quais baseia-se no célebre *princípio do máximo de Pontryagin* – uma condição necessária de optimalidade de primeira ordem para problemas do controlo óptimo. A primeira etapa da teoria é resumida no livro [199] de L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze e E. F. Mishchenko. O princípio do máximo de Pontryagin veio dar respostas a longas décadas de busca de condições necessárias satisfatórias para problemas de optimização com equações diferenciais como restrições e pode ser interpretado como uma extensão a este tipo de problemas das condições necessárias clássicas de Erdmann, Euler-Lagrange e Weierstrass do cálculo das variações, onde as hipóteses são grandemente relaxadas. Os desenvolvimentos associados ao trabalho da escola de L. S. Pontryagin dos anos 50 e 60, foram uma das grandes proezas da matemática nas últimas décadas, tendo tido um impacto crucial em vários campos de aplicação que vão desde a Investigação Operacional (cf. *verbi gratia* [29, 28, 244]), Teoria dos Sistemas (cf. v.g. [92]), Economia (cf. v.g. [55, 158] e [197, Cap. 14]), Ciências da Gestão (cf. v.g. [73, 223]), Engenharia, Astronáutica, Biologia, Física e Matemática (cf. v.g. [73, 77, 134, 288, 226, 104, 213, 38, 194] ou [157, §3.4]). Por outro lado, como já assinalado, o princípio do máximo de Pontryagin deve ser completado por um teorema de existência. Na ausência de uma teoria da existência, o princípio do máximo de Pontryagin está aberto às mesmas críticas do algoritmo de Euler-Lagrange, um algoritmo, não obstante, fundamental na análise moderna e na teoria das distribuições de Schwartz (cf. [307, p. 230]). Incidentalmente, a existência encontra aqui as mesmas dificuldades fundamentais que no cálculo das variações.

No controlo óptimo, aliás como em qualquer problema de optimização em espaços de funções, a questão das propriedades de regularidade das soluções é uma questão natural a colocar. Mas tal como no cálculo das variações, também no controlo óptimo a questão da regularidade é muito mais do que uma das questões básicas a colocar. Ela encerra a chave das discrepâncias entre a teoria da existência e os resultados de optimalidade. O primeiro teorema geral de existência para problemas do controlo óptimo foi obtido em [103] por A. F. Filippov. As técnicas usadas para estabelecer existência de óptimo, usam argumentos de compacidade que requerem espaços de funções mais abrangentes e por isso apenas asseguram a existência nestes espaços. O espaço de controlos mensuráveis é o espaço usualmente considerado. Por outro lado, as condições necessárias standard, como seja o princípio do máximo de Pontryagin [199], colocam certas restrições à estrutura dos controlos óptimos. Por exemplo, a formulação do princípio do máximo de Pontryagin em [199] assume que os controlos são mensuráveis e *limitados*. Repare-se que em controlo óptimo, exigir que a trajectória $x(\cdot)$ seja Lipschitziana, $x(\cdot) \in W_{1,\infty}$, remonta a exigir que o respectivo controlo seja mensurável e limitado: $u(\cdot) \in L_\infty$. O cenário é em tudo idêntico ao do cálculo das variações: as condições necessárias de optimalidade podem falhar para os minimizantes preditos pela teoria da existência; sob as hipóteses em que as condições necessárias são válidas a existência não é garantida. Por conseguinte, obter condições que garantam que os controlos óptimos são essencialmente limitados, é um problema pertinente e fulcral. Também do ponto de vista da Engenharia, e porque sempre existirão limites físicos nas saídas dos dispositivos de controlo, é importante que os controlos óptimos sejam limitados. É mais uma vez curioso, como escrevem Clarke e Vinter em [71], que esta questão tenha sido subestimada em controlo óptimo e que esta área de investigação esteja totalmente por desenvolver. Estabelecer resultados nesta área foi a motivação inicial e a *Alma Mater* da presente tese.

Os únicos esforços neste sentido, tanto quanto nos é dado a conhecer, podem ser encontrados em [71]. No entanto, dada a dificuldade do problema, neste artigo F. Clarke e R. Vinter consideram problemas de controlo óptimo muito particulares, com dinâmica linear e invariante no tempo. Com as condições impostas, o problema é reformulado como um problema do cálculo das variações envolvendo derivadas de ordem superior e as conclusões são obtidas por simples aplicação dos resultados de regularidade obtidos previamente em [72]. Neste trabalho vamos abordar os problemas de controlo óptimo na sua versão mais ampla. Como casos particulares, eles incluem o problema fundamental do cálculo das variações e os problemas do cálculo das variações com derivadas de ordem superior. Respostas para o caso de dinâmica afim de controlo, uma classe de problemas de controlo óptimo muito importante, que constitui o modelo cinemático em mecânica e geometria (cf. [138, Cap. 4]) e que constitui uma generalização considerável dos problemas antes tratados, foram já publicadas em [217] e [218]. Resultados para o caso geral de dinâmica não linear primam pela completa ausência na literatura. No Capítulo 6 colmatamos esta falha.

A abordagem à regularidade Lipschitziana, proposta no âmbito desta tese de doutoramento, comporta três etapas. Elas resultam de um aprimoramento das técnicas e ideias introduzidas pelo autor em [263], mais tarde refinadas em [217] e explicitadas em [218]. O mote de partida é que as condições de regularidade Lipschitziana surgem das condições de aplicabilidade do princípio do máximo de Pontryagin a um problema auxiliar. Embora esta possa parecer uma ideia no mínimo exótica, já que a regularidade é de importância crítica *à priori*, como hipótese, na obtenção das condições necessárias, ela tem raízes profundas no cálculo das variações e faz jus a Hilbert. Num resultado clássico de regularidade C^2 para os minimizantes do problema fundamental do cálculo das variações, Hilbert estabeleceu o facto de que quando o Lagrangeano L é duas vezes diferenciável com continuidade, $L \in C^2$, e $L_{\dot{x}\dot{x}}$ é globalmente definida positiva, a solução $x(\cdot)$ do problema é também C^2 (cf. [263, Teorema 48], [76, §4.1.3]). Ora a demonstração deste resultado usa condições necessárias, deixando já antever, a nosso ver, o jogo possível entre as condições necessárias de optimalidade e os teoremas de regularidade. Esta simbiose é o fulcro da nossa abordagem à regularidade dos minimizantes no controlo óptimo. Resumimos o nosso método nos seguintes passos.

1. Reescrever o problema numa forma equivalente, no sentido que conhecida uma solução para um dos problemas é possível construir uma solução para o outro com o valor das funcionais a coincidir (Capítulos 1 e 2);

2. Estabelecer uma correspondência entre as extremais dos dois problemas (Capítulos 3 e 4).

3. Garantir a aplicabilidade das condições necessárias ao problema auxiliar e, usando uma lei de conservação adequada (Capítulo 5), obter as conclusões de regularidade pretendidas (Capítulo 6).

O método funciona porque a transformação do problema, embora mantendo a equivalência no sentido acima exposto, faz com que algumas das propriedades do problema original, como linearidade, continuidade, convexidade, etc., possam ser alteradas. O jogo é na sua essência muito simples e consiste em fazer com que as hipóteses pertinentes, passíveis de serem violadas por um dos problemas, sejam válidas para o outro. Um exemplo elementar, mas que ilustra bem a efectividade desta ideia, pode ser encontrado em [288, pp. 257 e 258]. Aí J. L. Troutman resolve o célebre problema de *braquistócrona* usando uma transformação da variável de estado que torna o Lagrangeano do problema estritamente convexo. Um outro exemplo interessante pode ser encontrado em [157, §4.2]: com uma transformação do tempo obtém-se um problema auxiliar que, por aplicação do teorema dos multiplicadores de Lagrange para problemas abstractos de optimização em espaços de Banach, permite obter o princípio do máximo de Pontryagin para o problema original. A ideia de que a questão da regularidade Lipschitziana no controlo óptimo e cálculo das variações só pode ser resolvida com o uso da análise não suave (cf. [162, Cap. 1], [295, Cap. 11], [59, 63]) é assim impugnada.

Os resultados intermédios obtidos, de modo a levar a bom termo a abordagem acima delineada, apresentam interesse *per se*. Embora possam ser secundários nesta dissertação, não são necessariamente de importância secundária. Eles significam que entrámos mais profundamente no coração do nosso assunto! São disso exemplo os resultados do Capítulo 3, publicados em [268], e os resultados do Capítulo 5 sobre leis de conservação que, em versões menos gerais, foram já publicados em [266, 270, 275, 271] (vejam-se ainda as conclusões, resultados preliminares e desenvolvimentos futuros, a partir da página 115). As leis de conservação são quantidades conservadas ao longo das extremais do problema. Elas são obtidas no cálculo das variações por intermédio do famoso teorema de Emmy Noether [186]. Este resultado clássico de 1918 explica a correspondência entre a invariância do problema sob uma família de transformações uni-paramétrica e a existência de leis de conservação para as equações de Euler-Lagrange que lhe estão associadas. Esta relação é a base da Física moderna que, na sua essência, é construída usando princípios variacionais e postulando a existência desta ou daquela invariância física (por exemplo assumindo que o sistema é conservativo). No Capítulo 5 obtemos várias generalizações do teorema de Noether para as extremais de Pontryagin dos problemas de controlo óptimo. As leis de conservação que obtemos são importantes por muitas razões. Elas podem ser usadas para baixar a ordem do sistema Hamiltoniano de equações diferenciais e simplificar a resolução do problema de controlo óptimo (cf. v.g. [32]); na síntese do fenómeno de Lavrentiev [129]; na análise da estabilidade e controlabilidade de sistemas de controlo [125]; etc.

O presente trabalho está organizado em seis capítulos, conforme supradito. No fim apresentamos as referências bibliográficas, que foram sendo citadas ao longo do texto, assim como um índice remissivo de termos e notações que esperamos possa servir de ajuda na leitura do trabalho. Embora algumas preocupações pedagógicas tenham estado na mente do autor, a ênfase do texto é científica e não didáctica. Conhecimentos preambulares, que o leitor porventura encontre necessários à inteira compreensão de algum ponto do trabalho, podem ser encontrados na dissertação de mestrado do autor (*vide* [263, Parte de Síntese]).

Não podemos terminar esta introdução sem salientar que, em variadíssimos momentos, cristalizados em vários pontos do trabalho (e.g. nos resultados do Capítulo 5), os ensinamentos de Young foram verdadeiramente sábios: em [307, p. 73]

> "We invite the reader to study at first hand, as explained with remarkable clarity by one of the great thinkers of a past era. A broad understanding of mathematical ideas cannot be reached without using library facilities properly to get material at first hand."

ou então em [309, p. 423]

> "I advise students to go back to the sources... Read by all means what is up-to-date, but also what started it all!"

"Have you got an answer? No, but I've got a different name for the problem."

—Douglas Adams

"The very essence of Mathematics lies in transforming a problem."

—Jules Henri Poincaré

1

Transformações dos problemas de controlo óptimo

Neste capítulo coligimos várias formulações equivalentes do problema matemático do controlo óptimo e explicamos como os problemas do cálculo das variações podem ser expressos neste formalismo. A forma canónica a adoptar ao longo do trabalho é estabelecida: problema (P). Todas as transformações encontradas na literatura podem ser sistematizadas em dois tipos: as que envolvem mudança das variáveis de estado e controlo, sem alteração da variável independente t; as que mudam a variável tempo t. Estas últimas, muito menos populares que as primeiras, assumem papel central em todo o nosso trabalho.

1.1 Intróito

O controlo óptimo é uma área multidisciplinar, com raízes no cálculo das variações, na teoria clássica do controlo, nos processos aleatórios, na programação linear e não-linear, nos algoritmos e computadores digitais, e na programação dinâmica (cf. [40, 213]); motivada por inúmeros problemas práticos de engenharia, como sejam a condução de aviões, veículos espaciais, robots e outros veículos autónomos (cf. [40, 194]). De uma maneira muito genérica, o problema do controlo óptimo consiste em encontrar funções de controlo de maneira a optimizar um determinado índice de performance quando sujeito a restrições descritas por equações diferenciais. Embora problemas de controlo óptimo tenham sido formulados tão cedo como 1919 (cf. [40, p. 29]), foi em finais dos anos cinquenta, com a formulação e demonstração do princípio do máximo de Pontryagin – uma condição necessária de optimalidade de primeira ordem – pelo grupo de matemáticos L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze e E. F. Mishchenko, que a teoria matemática do controlo óptimo principiou (cf. [199, 156, 26, 35, 113, 114]). Associado ao problema de controlo óptimo, inúmeras questões de interesse se colocam e, desde a formulação e demonstração do princípio do máximo de Pontryagin, milhares de artigos e livros foram escritos. A teoria do controlo óptimo é hoje uma área extensa, com várias abordagens possíveis, com vários domínios de aplicabilidade, em matemática, engenharia, economia, ciências sociais, medicina, ... e uma fonte das mais variadas técnicas e ideias (cf. [58, 61, 230, 229, 235, 38]). Neste trabalho lidamos exclusivamente com problemas de controlo óptimo deterministas e a nossa abordagem será a da Análise.

1.2 O problema de Bolza do controlo óptimo

Estamos interessados na minimização (ou maximização) de funcionais da forma

$$I\left[x(\cdot),u(\cdot)\right] = \mathscr{L}\left(\alpha,x(\alpha),\beta,x(\beta)\right) + \int_\alpha^\beta L\left(t,x(t),u(t)\right)\mathrm{d}t\,, \tag{1.1}$$

onde se requer que o par $(x(\cdot),u(\cdot))$ satisfaça o sistema de equações diferenciais ordinárias[1]

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi\left(t,x(t),u(t)\right)\,, \tag{1.2}$$

chamado *sistema de controlo*, e as condições de fronteira

$$(\alpha,x(\alpha),\beta,x(\beta)) \in \mathscr{F}\,. \tag{1.3}$$

A variável real t, $t \in \mathbb{R}$, é a variável independente, chamada *tempo*; $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $t \in [\alpha,\beta]$, a *trajectória de estado*; $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_r(t)) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$, $t \in [\alpha,\beta]$, o *controlo*. Os dados do problema incluem a função $\mathscr{L} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; o *Lagrangeano* $L : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$; a *dinâmica* $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$; os conjuntos $\mathscr{F}$, Ω; e as classes de funções a que pertencem $x(\cdot)$ e $u(\cdot)$. Os instantes de tempo α e β, $\alpha < \beta$, podem, ou não, estar fixos. Este é o chamado *problema de Bolza* do controlo óptimo.

Os integrais que aparecem no presente trabalho são sempre interpretados no sentido de Lebesgue. Este facto é essencial, uma vez que o problema será formulado para trajectórias absolutamente contínuas e para controlos mensuráveis.

[1] O ponto é usado para denotar diferenciação em relação a t. A linha ($'$) denotará, neste trabalho, a derivada em relação a τ.

Definição 1 *Dizemos que o par* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *é* admissível *para o problema* (1.1)–(1.3) *se:*

(i) $x(\cdot)$ *é uma função absolutamente contínua definida em* $[\alpha, \beta]$ *e com valores em* $\mathbb{R}^n$*:* $x(\cdot) \in W_{1,1}([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$*;*

(ii) $u(\cdot)$ *é uma função mensurável (à Lebesgue) definida no intervalo* $[\alpha, \beta]$ *e com valores em* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^r$ *em quase todos os pontos (q.t.p.)* $t \in [\alpha, \beta]$*:* $u(\cdot) \in L_1^r([\alpha, \beta]; \Omega)$*;*

(iii) *o par* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *é solução do sistema* (1.2) *em q.t.p.* $t \in [\alpha, \beta]$*;*

(iv) $t \mapsto L(t, x(t), u(t)) \in L_1([\alpha, \beta]; \mathbb{R})$*;*

(v) $x(\cdot)$ *satisfaz as condições de fronteira* (1.3)*.*

Observação 2 *Se* $x(\cdot)$ *é absolutamente contínua ela é o integral da sua derivada. Por conseguinte, a Definição 1 contém a afirmação que a função* $t \mapsto \varphi(t, x(t), u(t))$ *é integrável à Lebesgue em* $[\alpha, \beta]$*.*

Seja $\mathscr{A}$ o conjunto de todos os pares admissíveis. O problema de controlo óptimo consiste então em determinar, se possível, um par $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \in \mathscr{A}$ que satisfaça a desigualdade $I[\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)] \leq I[x(\cdot), u(\cdot)]$ para todo o $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathscr{A}$. O problema é formulado como um de minimização; o problema de maximizar $I[x(\cdot), u(\cdot)]$ é equivalente ao problema de minimizar $-I[x(\cdot), u(\cdot)]$.

Definição 3 *Uma solução* $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ *do problema de controlo óptimo é designada por* minimizante*. A trajectória* $\tilde{x}(\cdot)$ *é chamada de* trajectória minimizante *e* $\tilde{u}(\cdot)$ *de* controlo minimizante*.*

1.3 Formulações equivalentes

Certos casos especiais do problema de Bolza do controlo óptimo são na verdade equivalentes ao problema de Bolza, no sentido que o problema de Bolza pode ser transformado num desses casos especiais. Esta possibilidade de reescrita dos problemas uns nos outros tem sido usada nas demonstrações dos mais diversos resultados (*vide* v.g. [56], [216, §6, §8]).

Dois casos especiais do problema de Bolza são obtidos fazendo:

- $L \equiv 0$ — *problema de Mayer* do controlo óptimo;
- $\mathscr{L} \equiv 0$ — *problema de Lagrange* do controlo óptimo.

Vamos mostrar que as formulações de Mayer e de Lagrange são tão gerais como a de Bolza, mostrando como o problema de Bolza pode ser escrito nestas formas.

Formulamos o problema de Bolza como um de Mayer usando um espaço de estados de dimensão superior. Seja $(x(\cdot), u(\cdot))$ um par admissível para o problema de Bolza (1.1)–(1.3) e introduzamos a notação $z(t) = (x_0(t), x(t)) = (x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in [\alpha, \beta]$, onde $x_0(\cdot)$ é uma função absolutamente contínua tal que

$$\dot{x_0}(t) = L\left(t, x(t), u(t)\right) , \quad x_0(\alpha) = 0 ,$$

para quase todos os t em $[\alpha, \beta]$:

$$x_0(t) = \int_\alpha^t L\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right) \mathrm{d}\tau .$$

Temos então que $(z(\cdot), u(\cdot))$ é um par admissível para o seguinte problema de Mayer:

$$\begin{gathered}
\mathscr{L}\left(\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)\right) + x_0(\beta) \longrightarrow \min , \\
\begin{cases} \dot{x_0}(t) = L\left(t, x(t), u(t)\right) , \\ \dot{x}(t) = \varphi\left(t, x(t), u(t)\right) , \end{cases} \\
(x_0(\alpha), x_0(\beta), \alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)) \in \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathscr{F} .
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Inversamente, a todo o par admissível $(z(\cdot), u(\cdot))$ para o problema de Mayer (1.4) corresponde um par admissível $(x(\cdot), u(\cdot))$ para o problema de Bolza (1.1)–(1.3), onde $x(\cdot)$ consiste nas últimas n componentes de $z(\cdot)$. Em qualquer uma das situações, os valores das funcionais dos dois problemas coincidem.

Mostramos agora como o problema de Bolza pode ser formulado como um de Lagrange. Seja $(x(\cdot), u(\cdot))$ um par admissível para o problema (1.1)–(1.3) e seja $z(t) = (x_0(t), x(t))$ com

$$x_0(t) \equiv \frac{\mathscr{L}\left(\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)\right)}{\beta - \alpha} .$$

Então $(z(\cdot), u(\cdot))$ é um par admissível para o problema de Lagrange

$$\begin{gathered}
\int_\alpha^\beta \left(L\left(t, x(t), u(t)\right) + x_0(t)\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min , \\
\begin{cases} \dot{x_0}(t) = 0 , \\ \dot{x}(t) = \varphi\left(t, x(t), u(t)\right) , \end{cases} \\
(x_0(\alpha), x_0(\beta), \alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)) \in \mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_0 \times \mathscr{F} ,
\end{gathered} \tag{1.5}$$

onde $\mathscr{X}_0 = \left\{ \dfrac{\mathscr{L}\left(\alpha, x_\alpha, \beta, x_\beta\right)}{\beta - \alpha} : (\alpha, x_\alpha, \beta, x_\beta) \in \mathscr{F} \right\}$. Resulta claro que o valor das funcionais para os problemas (1.1)–(1.3) e (1.5) coincidem. O inverso é também verdade: a cada par $(z(\cdot), u(\cdot))$ admissível para o problema (1.5) corresponde o par $(x(\cdot), u(\cdot))$, onde $x(\cdot)$ é formado pelas últimas n componentes de $z(\cdot)$, admissível para o problema (1.1)–(1.3) e com os respectivos valores das funcionais a coincidirem. Desde modo, o problema de Lagrange (1.5) é equivalente ao problema de Bolza (1.1)–(1.3) considerado no início do capítulo.

Como dissemos, no problema (1.1)–(1.3) o instante inicial α e o instante terminal β podem não estar fixos. Vamos agora mostrar que o problema (1.1)–(1.3) pode ser escrito como um problema de tempo inicial e terminal fixos. O ardil para a redução do problema com tempo inicial e terminal variáveis num com tempo inicial e terminal fixos é a mudança de tempo

$$t = \alpha + \frac{(\tau - a)(\beta - \alpha)}{b - a}, \quad a \leq \tau \leq b\,, \tag{1.6}$$

$a < b$ fixos, e a introdução de duas novas variáveis de estado escalares: $t(\tau)$ e $x_0(\tau)$, $\tau \in [a, b]$. Introduzindo a notação $z(\tau) = x\left(t(\tau)\right)$ e $v(\tau) = u\left(t(\tau)\right)$, formulamos o problema

$$\begin{gathered}
\mathscr{L}\left(t(a), z(a), t(b), z(b)\right) + \int_a^b L\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right) x_0(\tau) \mathrm{d}\tau \longrightarrow \min\,, \\
\begin{cases}
t'(\tau) = \dfrac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = x_0(\tau)\,, \\
x_0'(\tau) = \dfrac{\mathrm{d}x_0(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = 0\,, \\
z'(\tau) = \dfrac{\mathrm{d}z(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \varphi\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right) x_0(\tau)\,,
\end{cases} \\
\left(t(a), z(a), t(b), z(b)\right) \in \mathscr{F}\,, \quad x_0(a) = x_0(b) = \frac{t(b) - t(a)}{b - a}\,.
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Notar que no problema (1.7) o tempo inicial a e o tempo terminal b estão fixos; as trajectórias de estado são $(t(\tau), x_0(\tau), z(\tau))$, $\tau \in [a, b]$, e tomam valores em $\mathbb{R}^{2+n}$; o controlo é $v(\tau)$, $\tau \in [a, b]$, e toma valores em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^r$. Uma vez que o α e o β do problema (1.1)–(1.3) satisfazem a igualdade $\beta - \alpha > 0$, segue-se que a trajectória de estado $x_0(\tau)$ do problema (1.7) é uma constante positiva, de valor $\frac{\beta - \alpha}{b - a}$, para $a \leq \tau \leq b$. Se $(x(\cdot), u(\cdot))$ é um par admissível para o problema (1.1)–(1.3), verifica-se imediatamente que $(t(\cdot), x_0(\cdot), z(\cdot), v(\cdot))$ é admissível para o problema (1.7) com $t(\tau) = \alpha + \frac{(\tau - a)(\beta - \alpha)}{b - a}$, $x_0(\tau) = \frac{t(b) - t(a)}{b - a} = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$, $z(\tau) = x(t(\tau))$ e $v(\tau) = u(t(\tau))$, $\tau \in [a, b]$, e com os respectivos valores das funcionais a coincidirem. Reciprocamente, se $(t(\cdot), x_0(\cdot), z(\cdot), v(\cdot))$ é admissível para o problema (1.7) de tempos de fronteira fixos, então $(x(\cdot), u(\cdot))$ é um par admissível para o problema (1.1)–(1.3) se fizermos $x(t) = z\left(\tau(t)\right)$ e $u(t) = v\left(\tau(t)\right)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ e $\tau(t) = a + \frac{(t - \alpha)(b - a)}{\beta - \alpha}$, resultando valores para as respectivas funcionais iguais.

Um caso especial das condições de fronteira (1.3) ocorre se as condições iniciais e finais forem separadas. Neste caso um conjunto $\mathscr{F}_\alpha$ de pontos $(\alpha, x(\alpha))$ e um conjunto $\mathscr{F}_\beta$ de pontos $(\beta, x(\beta))$, ambos em $\mathbb{R}^{1+n}$, são dados:

$$(\alpha, x(\alpha)) \in \mathscr{F}_\alpha\,, \quad (\beta, x(\beta)) \in \mathscr{F}_\beta\,. \tag{1.8}$$

Vamos mostrar que o requerimento (v) da Definição 1 pode ser reduzido à forma: $x(\cdot)$ *satisfaz as condições de fronteira* (1.8). Mais uma vez, a técnica consiste no uso de um espaço de estados de dimensão superior. Com os mesmos dados do problema (1.1)–(1.3), consideremos o problema

$$\begin{gathered}
\mathscr{L}\left(\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)\right) + \int_\alpha^\beta L\left(t, x(t), u(t)\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,,\\
\begin{cases}
\dot{x}(t) = \varphi\left(t, x(t), u(t)\right)\,,\\
\dot{y}(t) = 0\,, \quad y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{1+n}\,,
\end{cases}\\
(\alpha, x(\alpha), y(\alpha)) \in \mathscr{F}_\alpha := \mathscr{F}\,,\\
(\beta, x(\beta), y(\beta)) \in \mathscr{F}_\beta := \left\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{2\times(n+1)} : y_0 = t\,, y_i = x_i\,(i = 1, \ldots, n)\right\}\,.
\end{gathered} \tag{1.9}$$

Da maneira como o problema (1.9) é construído, resulta que $(x(\cdot), u(\cdot))$ é admissível para o problema (1.1)–(1.3) se, e somente se, $(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$ com $y(t) \equiv (\beta, x(\beta))$ for admissível para o problema (1.9). Tendo em conta que as funcionais dos dois problemas são iguais, podemos afirmar que os problemas (1.1)–(1.3) e (1.9) são equivalentes.

Os problemas do controlo óptimo dizem-se autónomos quando as funções L e φ são invariantes no tempo. É sempre possível reduzir um problema de controlo óptimo a um autónomo, introduzindo uma variável de estado x_{n+1}, a equação diferencial adicional $\dot{x}_{n+1}(t) = 1$ e a condição de fronteira $x_{n+1}(\beta) = \beta$, de modo a que se tenha $x_{n+1}(t) = t$. Os problemas podem mesmo ser reduzidos ao caso autónomo num intervalo fixo, digamos $[0, 1]$, como vimos na página anterior (cf. problema (1.7)).

1.4 Problemas isoperimétricos e optimização paramétrica

Em alguns problemas do controlo óptimo, para além das restrições já consideradas, surgem restrições da forma

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta h_i\left(t, x(t), u(t)\right) \mathrm{d}t \leq c_i\,, \quad i = 1, \ldots, p\,, \\ \int_\alpha^\beta h_j\left(t, x(t), u(t)\right) \mathrm{d}t = c_j\,, \quad j = p+1, \ldots, q\,, \end{aligned} \tag{1.10}$$

onde a função $h = (h_1, \ldots, h_q) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^q$ e as constantes c_i, $i = 1, \ldots, q$, são dadas. As restrições da forma (1.10) são chamadas de *restrições isoperimétricas*. Alguns problemas isoperimétricos foram considerados, e parcialmente resolvidos, pelos antigos Gregos. Foram eles que propuseram o problema de encontrar a curva fechada no plano, de comprimento dado, que encerra uma área máxima. A lenda da rainha Dido de Cartago mostra a resposta correcta: uma circunferência. Um problema com restrições isoperimétricas (1.10) pode ser reduzido a um problema sem restrições isoperimétricas, introduzindo q variáveis de estado adicionais: $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_q(t)) \in \mathbb{R}^q$, $t \in [\alpha, \beta]$. Seja $(x(\cdot), u(\cdot))$ um par admissível para o problema (1.1)–(1.3) satisfazendo as restrições (1.10). Então, $(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$, com

$$y(t) = \int_\alpha^t h\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right) \mathrm{d}\tau\,, \quad t \in [\alpha, \beta]\,,$$

é admissível para o problema

$$\begin{gathered} \mathscr{L}\left(\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)\right) + \int_\alpha^\beta L\left(t, x(t), u(t)\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,, \\ \begin{cases} \dot{x}(t) = \varphi\left(t, x(t), u(t)\right)\,, \\ \dot{y}(t) = h\left(t, x(t), u(t)\right)\,, \end{cases} \\ \left(\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)\right) \in \mathscr{F}\,, \\ y(\alpha) = 0\,, \quad y_i(\beta) \leq c_i\,, \quad y_j(\beta) = c_j\,, \end{gathered} \tag{1.11}$$

$i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, q$. Reciprocamente, se $(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$ é admissível para (1.11) então $(x(\cdot), u(\cdot))$ é admissível para o problema (1.1)–(1.3) e satisfaz as restrições isoperimétricas (1.10). Deste modo escrevemos um problema com restrições (1.10) num problema equivalente da forma (1.1)–(1.3), sem restrições isoperimétricas.

No problema (1.1)–(1.3) o Lagrangeano L e a dinâmica φ são funções dadas, fixas. Em algumas aplicações, estas funções dependem de um vector de parâmetros $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k) \in \Pi$, à nossa disposição, onde $\Pi \subseteq \mathbb{R}^k$ é um conjunto dado. Temos então o chamado *problema* *de controlo óptimo paramétrico*:

$$
\begin{aligned}
I\left[x(\cdot), \pi, u(\cdot)\right] = \mathscr{L}\left(\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)\right) + \int_\alpha^\beta L\left(t, x(t), \pi, u(t)\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,, \\
\dot{x}(t) = \varphi\left(t, x(t), \pi, u(t)\right)\,, \\
\left(\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)\right) \in \mathscr{F}\,.
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Para uma dada escolha do controlo $u(\cdot)$, a trajectória de estado correspondente $x(\cdot)$, assim como o valor da funcional, dependem agora da escolha dos valores dos parâmetros π. O problema de controlo óptimo paramétrico consiste então na escolha de $\tilde{\pi}$ em Π, para o qual existe um par admissível $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ tal que $I\left[\tilde{x}(\cdot), \tilde{\pi}, \tilde{u}(\cdot)\right] \le I\left[x(\cdot), \pi, u(\cdot)\right]$ para todo o $\pi \in \Pi$ e correspondentes pares admissíveis $(x(\cdot), u(\cdot))$. O problema (1.12) pode ser reformulado num problema equivalente da forma (1.1)–(1.3), introduzindo k novas trajectórias de estado, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_k(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Usando a notação $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$ o problema (1.12) é reescrito como se segue:

$$
\begin{gathered}
I\left[z(\cdot), u(\cdot)\right] = \mathscr{L}\left(\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)\right) + \int_\alpha^\beta L\left(t, z(t), u(t)\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,, \\
\dot{z}(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = \varphi\left(t, z(t), u(t)\right)\,, \\ \dot{y}(t) = 0\,, \end{cases} \\
\left(\alpha, x(\alpha), y(\alpha), \beta, x(\beta), y(\beta)\right) \in \left\{(t_\alpha, x_\alpha, y_\alpha, t_\beta, x_\beta, y_\beta) : (t_\alpha, x_\alpha, t_\beta, x_\beta) \in \mathscr{F} \wedge y_\alpha \in \Pi\right\}\,.
\end{gathered}
\tag{1.13}
$$

1.5 O cálculo das variações

O controlo óptimo é uma generalização rica do cálculo das variações – uma área clássica da matemática (cf. [123]), com mais de trezentos anos,[2] mas ainda hoje uma área de investigação extremamente activa[3] – de onde foi beber muitos dos seus temas, problemas e métodos (cf. [63, 238, 239]). A teoria matemática do controlo óptimo é, no entanto, muito mais do que uma face moderna do cálculo das variações. Há uma mudança profunda de paradigma, que prevalece em importância sobre o relacionamento matemático das duas. Esta mudança de ponto de vista, faz com que certo tipo de questões possam ser respondidas de uma forma mais natural num modelo, do que no outro. Um bom exemplo onde a abordagem do controlo óptimo se revela muito mais efectiva, é no estudo da regularidade Lipschitziana

[2] O cálculo das variações nasceu em 1697 quando Johann Bernoulli publicou a solução do problema de *braquistócrona*. O leitor interessado na braquistócrona pode consultar, *verbi gratia*, [23, Cap. 8], [157, Exemplo 1.4.3], [247, The seventh story], ou [128, 240].

[3] A *American Mathematical Society* cataloga, todos os meses, à volta de 50 novos artigos publicados na área do cálculo das variações.

das trajectórias minimizantes para o problema fundamental do cálculo das variações e para problemas do cálculo das variações com derivadas de ordem superior (*vide* [263]). Vamos ver de seguida como estes problemas do cálculo das variações podem ser formulados como problemas de controlo óptimo.

O problema fundamental do cálculo das variações, que representou um papel central no desenvolvimento da matemática e física (cf. [86, Cap. 3], [212]), permanece ainda hoje relevante. Pode ser formulado como se segue:

$$\begin{gathered} I\left[x(\cdot)\right] = \mathscr{L}\left(\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)\right) + \int_\alpha^\beta L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,, \\ (\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)) \in \mathscr{F}\,. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Mais uma vez t é um escalar, $x(t)$ um vector em $\mathbb{R}^n$, $t \in [\alpha, \beta]$, e $\dot{x}(\cdot)$ a derivada de $x(\cdot)$. O Lagrangeano L é uma função real definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\mathscr{F}$ um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^{2+2\times n}$ e $\mathscr{L}$ uma função de valor real definida em $\mathscr{F}$.

Definição 4 *Dizemos que $x(\cdot)$ é uma trajectória admissível para o problema fundamental do cálculo das variações se*

(i) $x(\cdot)$ *é uma função absolutamente contínua em* $[\alpha, \beta]$*:* $x(\cdot) \in W_{1,1}\left([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n\right)$*;*

(ii) $(\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)) \in \mathscr{F}$*;*

(iii) $t \to L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)$ *é integrável em* $[\alpha, \beta]$.

O problema fundamental do cálculo das variações (1.14) pode ser reescrito como um problema de controlo óptimo introduzindo o controlo $u(\cdot) = \dot{x}(\cdot)$. Obtemos então o seguinte problema de controlo óptimo ($r = n$, $\varphi = u$, $\Omega = \mathbb{R}^n$):

$$\begin{gathered} I\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] = \mathscr{L}\left(\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)\right) + \int_\alpha^\beta L\left(t, x(t), u(t)\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,, \\ \dot{x}(t) = u(t)\,, \quad u(t) \in \mathbb{R}^n\,, \\ (\alpha, x(\alpha), \beta, x(\beta)) \in \mathscr{F}\,. \end{gathered}$$

Problemas do cálculo das variações com derivadas de ordem superior, digamos[4]

$$\begin{gathered} I\left[x(\cdot)\right] = \int_a^b L\left(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(m)}(t)\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,, \\ x(\cdot) \in W_{m,1}\,, \end{gathered} \tag{1.15}$$

[4]Usamos a notação $W_{m,p}$, $m = 1, \ldots$, $1 \leq p \leq \infty$, para representar a classe de funções absolutamente contínuas conjuntamente com as suas derivadas até à ordem $m-1$ e possuindo m-ésima derivada em L_p.

podem sempre ser escritos na forma de Lagrange do controlo óptimo com sistema de controlo linear e autónomo. Basta tomar $\xi_1(t) = x(t)$, $\xi_2(t) = \dot{x}(t)$,..., $\xi_m(t) = x^{(m-1)}(t)$ e o problema (1.15) toma a forma

$$
\begin{gathered}
I\left[\xi(\cdot), u(\cdot)\right] = \int_a^b L\left(t, \xi(t), u(t)\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,, \\
\xi(\cdot) = \left(\xi_1(\cdot), \ldots, \xi_m(\cdot)\right) \in W_{1,1}\,, \quad u(\cdot) \in L_1\,, \\
\begin{cases}
\dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) \\
\vdots \\
\dot{\xi}_{m-1}(t) = \xi_m(t) \\
\dot{\xi}_m(t) = u(t)\,.
\end{cases}
\end{gathered}
$$

A grande diferença entre os problemas do cálculo das variações e os de controlo óptimo é que no cálculo das variações não existem restrições ao "controlo": no cálculo das variações Ω é todo o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ (é sempre um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$), enquanto em controlo óptimo pode ser um conjunto com fronteira.

1.6 Forma canónica adoptada: problema (P)

Sem perda de generalidade, o problema de controlo óptimo a considerar neste trabalho estará na forma de Lagrange com instantes inicial a e terminal b, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, fixos. Dados a e b, um conjunto arbitrário $\Omega \subseteq \mathbb{R}^r$, $L(\cdot,\cdot,\cdot) : [a,\, b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ e $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot) : [a,\, b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, o problema consiste então em minimizar uma funcional custo, da forma integral, entre todas as soluções de uma dada equação diferencial vectorial:

$$
\begin{gathered}
I\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] = \int_a^b L\left(t, x(t), u(t)\right) \mathrm{d}t \;\longrightarrow \min\,, \\
\dot{x}(t) = \varphi\left(t, x(t), u(t)\right) \quad \text{ para q.t.p. } t \in [a, b]\,, \\
x(\cdot) \in W_{1,1}\left([a,\, b]; \mathbb{R}^n\right),\, u(\cdot) \in \mathcal{U}\,.
\end{gathered}
\tag{P}
$$

De uma maneira geral, e quando nenhuma menção em contrário for especificada, assumimos que as funções L e φ são contínuas em $[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ e possuem derivadas contínuas em relação a t, x e u. A trajectória de estado $x(\cdot)$ é uma função n-vectorial absolutamente contínua e o controlo $u(\cdot)$ uma função r-vectorial, satisfazendo a restrição do controlo $u(t) \in \Omega$, (apenas) mensurável ou então mensurável e essencialmente limitada: $\mathcal{U} = L_1\left([a,\, b]; \Omega\right)$ (Capítulo 6) ou $\mathcal{U} = L_\infty\left([a,\, b]; \Omega\right)$ (caso dos Capítulos 3 e 5), respectivamente. Além da notação $W_{1,\,1}$, para a classe das funções absolutamente contínuas, usaremos ao longo do trabalho a notação

$W_{1,\infty}$ para designar a classe das funções Lipschitzianas.

Observação 5 *Já sabemos que o problema de controlo óptimo pode incluir condições de fronteira. Elas não são, contudo, relevantes para o presente estudo. Os resultados obtidos na tese são válidos para condições de fronteira arbitrárias.*

Definição 6 *Diremos que um par* $(x(\cdot),\, u(\cdot))$, $x(\cdot) \in W_{1,1}([a,\, b];\, \mathbb{R}^n)$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, *é* admissível *(para* (P)*) se ele satisfaz a relação* $\dot{x}(t) = \varphi(t,\, x(t),\, u(t))$.

Observação 7 *Não se impõe que as restrições* $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$ *e* $u(t) \in \Omega$ *sejam satisfeitas em* todos *os pontos* $t \in [a, b]$. *Esta igualdade e inclusão são entendidas no sentido* "quase sempre"*, significando que o conjunto de pontos* $t \in [a, b]$ *para os quais tais relações podem não ser satisfeitas é um conjunto de medida (de Lebesgue) nula.*

1.7 O problema de tempo mínimo

O problema de tempo mínimo é um caso particular do problema de controlo óptimo muito importante (*vide verbi gratia* [131, 111]) e que merece, também no nosso trabalho, especial destaque. A sua relevância, no estudo da regularidade Lipschitziana, será explorada no Capítulo 6. É do nosso interesse formulá-lo como se segue:

$$\begin{gathered} T \to \min \\ \dot{x}(t) = F(x(t),\, u(t)), \qquad \text{q.t.p.} \quad t \in [a,\, T], \\ x(\cdot) \in W_{1,1}([a, T];\, \mathbb{R}^n),\ u(\cdot) \in L_\infty([a, T];\, \Omega)\,. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Supomos $F(\cdot,\cdot)$, $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\cdot,\cdot)$, $i,\, j = 1, \ldots, n$, funções contínuas em $\mathbb{R}^{n+r}$. O controlo $u(\cdot)$, definido em $[a,\, T]$, toma os seus valores em $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ e é uma função mensurável e *limitada.*

Admitindo que o Lagrangeano L do nosso problema (P) é limitado inferiormente, o que é consequência da condição de coercividade da teoria da existência (cf. hipótese (H2) do Teorema 92 na Secção 2.2, pág. 29), e uma vez que adicionar uma constante a L, no problema (P), não altera os minimizantes, podemos assumir, sem perda de generalidade, que L é estritamente positivo. De facto, se $L(t, x, u) > \zeta$, minimizar

$$\int_a^b L(t, x(t), u(t))\, \mathrm{d}t\,,$$

sob as condições em (P), é equivalente a

$$\int_a^b \left(L(t, x(t), u(t)) - \zeta\right) \mathrm{d}t \to \min\,,$$

uma vez que a diferença das funções integrandas é uma constante, e basta então considerar a situação especial em que $L(t, x, u) > 0$. É interessante notar que qualquer problema (P) com $L > 0$ pode ser reduzido, usando uma ideia introduzida por R. V. Gamkrelidze nos anos 50,[5] a um problema de tempo mínimo autónomo. Essa transformação, conjuntamente com uma subsequente compactificação do conjunto de controlos (cf. Secção 2.2), foi usada por R. V. Gamkrelidze para demonstrar alguns resultados de existência para o cálculo das variações (*vide* [111, Chap. 8]). O artifício consiste em introduzir uma nova variável tempo τ, relacionada com t pela relação

$$\tau(t) = \int_a^t L(\theta, x(\theta), u(\theta))\, \mathrm{d}\theta\,, \quad t \in [a, b]\,.$$

Como

$$\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = L(t, x(t), u(t)) > 0\,, \tag{1.17}$$

temos que $\tau(\cdot)$ é uma função de t absolutamente contínua e estritamente monótona, para qualquer par $(x(t), u(t))$ satisfazendo $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$. Obviamente, $\tau(b) = T$ coincide com o valor da funcional do problema original (P). De (1.17) segue-se que $\tau(\cdot)$ admite função inversa $t(\cdot)$, definida em $[0, T]$, tal que

$$\frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{L(t(\tau),\, x(t(\tau)), u(t(\tau)))}.$$

Notar que a função inversa $t(\cdot)$ é, também, absolutamente contínua e monótona. Evidentemente,

$$\frac{\mathrm{d}x(t(\tau))}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x(t(\tau))}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\varphi(t(\tau),\, x(t(\tau)),\, u(t(\tau)))}{L(t(\tau),\, x(t(\tau)), u(t(\tau)))}. \tag{1.18}$$

Considerando τ como a variável independente, $t(\tau)$ e $z(\tau) = x(t(\tau))$ como componentes das trajectórias de estado e $v(\tau) = u(t(\tau))$ como o controlo, podemos transformar o problema (P) no seguinte problema de tempo mínimo:

$$\begin{gathered} T \longrightarrow \min \\ \begin{cases} t'(\tau) & = \dfrac{1}{L(t(\tau), z(\tau), v(\tau))} \\ z'(\tau) & = \dfrac{\varphi(t(\tau), z(\tau), v(\tau))}{L(t(\tau), z(\tau), v(\tau))} \end{cases} \\ v : \mathbb{R} \to \Omega\,, \\ t(0) = a\,, \quad t(T) = b\,. \end{gathered} \tag{1.19}$$

[5] Comunicado ao autor por A. A. Agrachev. Não foi possível uma confirmação documental que não a [111]. Refira-se a este propósito que a atribuição de ideias em matemática é muitas vezes polémica (cf. [35, §16]).

1.8 Consignação

Em controlo óptimo as designações de problema de Bolza, Mayer ou Lagrange provêm da terminologia usada no cálculo das variações (*vide verbi gratia* [34, Cap. VII]). O facto destas formulações serem todas equivalentes é bem conhecido (*vide* v.g. [52, Cap. 1]).

A tese defendida ao longo do trabalho é a de que a informação proveniente das transformações de problemas é extremamente útil. Isto deve-se ao facto de que ao fazer-se a transformação de um problema num outro, as propriedades do problema original são alteradas. Os métodos propostos na tese irão fazer uso extensivo desta particularidade, transformando o problema original, que *à priori* poderá não satisfazer um conjunto de hipóteses pertinentes, num outro problema que as satisfaz.

Podemos classificar as transformações dos problemas nos seguintes dois tipos:

- as que deixam a variável independente t inalterada;
- as que envolvem mudança da variável t.

Exemplos da primeira situação podem ser encontrados na obtenção dos problemas (1.4), (1.5), (1.9), (1.11) e (1.13). Exemplos onde ocorre mudança da variável tempo são a transformação (1.6), usada na formulação do problema (1.7), e a transformação "à Gamkrelidze" do problema de Lagrange no problema de tempo mínimo autónomo (1.19), conforme exposto na Secção 1.7 (cf. [111, p. 164], [52, p. 12]). Neste trabalho dedicamos a nossa atenção a transformações que envolvem mudança da variável de tempo t. Estamos particularmente interessados em saber como estas transformações alteram as extremais de Pontryagin dos problemas (Capítulo 4). Em primeiro lugar, é importante investigar como os pares admissíveis estado-controlo dos problemas original e transformado estão relacionados. É esse o assunto do próximo Capítulo 2.

"The whole of science, including mathematics, consists in the study of transformations or in the study of relations."

—Cassius J. Keyser

2

Relação entre as soluções e pares admissíveis

A forma canónica do problema de controlo óptimo adoptada, o problema (P), e as transformações consideradas no Capítulo 1, proporcionam uma boa oportunidade para a definição de problemas de controlo óptimo equivalentes. É importante conhecer como as transformações afectam os minimizantes e demais pares admissíveis. É esse o objectivo do presente capítulo.

2.1 Intróito

Na alvorada do século XX, em 1908, Elie Cartan introduziu um método extremamente poderoso que permite dar resposta a problemas de equivalência gerais (cf. [190, 115]). Por definição, um problema de *equivalência* consiste em determinar quando dois objectos dados, *verbi gratia*, dois polinómios, duas equações diferenciais, dois problemas do cálculo das variações, ou dois sistemas de controlo, podem ser mapeados um no outro por meio de uma mudança apropriada de variáveis. O procedimento algorítmico de Cartan, capaz, como dissemos, de resolver problemas de equivalência gerais, fornece condições necessárias e suficientes para a equivalência de dois objectos. Em espírito, o método de Cartan está relacionado com a invariância e a simetria dos problemas (cf. [190, 188]). Os resultados do presente capítulo constituem, por isso, o primeiro passo, básico mas fundamental, para o Capítulo 5.

Embora o método de Cartan seja extremamente poderoso, e tenha recebido grandes desenvolvimentos nos anos 30, para a resolução de vários problemas de equivalência de equações diferenciais e em geometria diferencial, nunca atingiu uma utilização generalizada na comunidade matemática. A utilidade do método de Cartan em teoria do controlo foi estabelecida por Robert Gardner (*vide* [115, Lecture 8]). A sua aplicação ao controlo óptimo, tanto quanto nos é dado a conhecer, nunca foi considerada. Contudo, a sua importância parece-nos óbvia: resolvido um problema de controlo óptimo teríamos então soluções explícitas para todos os problemas equivalentes. Para isso precisamos de definir o que entendemos por problemas de controlo óptimo equivalentes. Existem várias noções de *equivalência* possíveis, dependendo do tipo de mudanças de variáveis permitidas. Aqui consideraremos dois tipos de transformações que envolvem mudança da variável independente t.

2.2 Transformação da variável independente ao jeito de Gamkrelidze

Consideremos o seguinte problema de controlo óptimo:

$$\begin{gathered}
J\left[t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot)\right] = \int_{\tau_a}^{T} \Upsilon\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right) L\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right) \mathrm{d}\tau \longrightarrow \min\,, \\
\begin{cases} t'(\tau) & = \Upsilon\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right) \\ z'(\tau) & = \Upsilon\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right) \varphi\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right) \end{cases} \\
v : \mathbb{R} \to \Omega\,, \\
t(\tau_a) = a\,, \quad t(T) = b\,,
\end{gathered} \tag{2.1}$$

onde $\Upsilon(\cdot,\cdot,\cdot)$ é uma função estritamente positiva,

$$\Upsilon(t, z, v) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^+\,,$$

e diferenciável com continuidade, T é livre e Ω é um conjunto compacto. Comparado com (P), o problema tem uma variável de estado a mais. Designadamente, as suas variáveis de estado são $t(\cdot)$ e $z(\cdot)$. Note-se também que o problema é autónomo: quer o Lagrangeano quer o segundo membro do sistema de controlo não dependem directamente de τ. Por conseguinte, o conjunto admissível de (2.1) é invariante com respeito a translações de τ. Para a situação concreta em que $\tau_a = 0$ e $\Upsilon(t, z, v) = \frac{1}{L(t,z,v)}$, obtemos o problema de tempo mínimo (1.19). Existe uma certa relação entre os pares $(x(\cdot), u(\cdot))$ admissíveis de (P) e os ternos $(t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot))$ admissíveis de (2.1). Seja $(t(\tau), z(\tau), v(\tau))$, $\tau \in [\tau_a, T]$, admissível para (2.1). Uma vez que

$$\Upsilon\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right) > 0$$

a função $t(\tau)$ é estritamente crescente e podemos definir a função inversa $\tau(t)$ no intervalo $[a, b]$ pela relação

$$\tau\left(t(\tau)\right) = \tau \quad \forall \tau \in [\tau_a, T]\,.$$

Lema 8 *Se $(t(\tau), z(\tau), v(\tau))$, $\tau \in [\tau_a, T]$, é admissível (Definição 1) para* (2.1), *então*

$$(x(t), u(t)) = \left(z\left(\tau(t)\right), v\left(\tau(t)\right)\right)\,, \quad t \in [a, b]\,,$$

é admissível para (P).

Demonstração. Uma vez que estamos a assumir que Ω é compacto, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$0 < c_1 \leq \Upsilon\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right) \leq c_2$$

para quase todos os $\tau \in [\tau_a, T]$. Isto implica que

$$0 < c_1 \leq \frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \leq c_2 \tag{2.2}$$

para quase todos os $\tau \in [\tau_a, T]$. Por outro lado, por definição de trajectória admissível, $t(\tau)$ é uma função absolutamente contínua em $[\tau_a, T]$. Segue-se então de (2.2) que $\tau(t)$ é uma função absolutamente contínua em $[a, b]$ satisfazendo

$$\frac{1}{c_2} \leq \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} \leq \frac{1}{c_1} \tag{2.3}$$

quase sempre em $[a, b]$. A primeira desigualdade em (2.3) implica que a imagem inversa de $\tau(\cdot)$ de um conjunto de medida nula é um conjunto de medida nula ($\tau(\cdot)$ é injectiva). Isto implica que $u(t) = v\left(\tau(t)\right)$ é uma função mensurável em $[a, b]$. A segunda desigualdade em (2.3) implica que $x(t) = z\left(\tau(t)\right)$ é uma função absolutamente contínua em $[a, b]$. Pelas propriedades bem conhecidas das funções absolutamente contínuas (têm derivada em quase todos os pontos e a imagem e imagem inversa de conjuntos de medida completa são conjuntos de medida completa) os seguintes cálculos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}z\left(\tau(t)\right)}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \left[\Upsilon\left(t(\tau(t)), z(\tau(t)), v(\tau(t))\right)\varphi\left(t(\tau(t)), z(\tau(t)), v(\tau(t))\right)\right]\frac{1}{\Upsilon\left(t(\tau(t)), z(\tau(t)), v(\tau(t))\right)} \\
&= \varphi\left(t, x(t), u(t)\right)
\end{aligned}$$

estão justificados. A demonstração do lema está completa. ∎

Desta forma, a cada terno admissível do problema (2.1) corresponde um par admissível do problema (P). Conforme se mostra já de seguida, a correspondência inversa é também possível.

Lema 9 *Se* $(x(t), u(t))$, $t \in [a, b]$, *é admissível para* (P), *então o triplo*

$$(t(\tau), z(\tau), v(\tau)) = (t(\tau), x\,(t(\tau))\,, u\,(t(\tau)))\ , \quad \tau \in [\tau_a, T]\,,$$

com $t(\cdot)$ *a função inversa de*

$$\tau(t) = \tau_a + \int_a^t \frac{1}{\Upsilon\,(\theta, x(\theta), u(\theta))} \mathrm{d}\theta\,, \tag{2.4}$$

é admissível para (2.1). *Verifica-se ainda que*

$$T = \tau_a + \int_a^b \frac{1}{\Upsilon\,(t, x(t), u(t))} \mathrm{d}t\,. \tag{2.5}$$

Demonstração. Por hipótese, Ω é compacto e existem, portanto, constantes k_1 e k_2 tais que

$$k_1 \le \Upsilon\,(t, x(t), u(t)) \le k_2 \quad \text{q.t.p. } t \in [a, b]\,.$$

Daqui resulta que a função absolutamente contínua (2.4), $\tau(t)$, satisfaz

$$\frac{1}{k_2} \le \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} \le \frac{1}{k_1}$$

quase sempre em $[a, b]$. Definindo a função $t(\tau)$, $\tau \in [\tau_a, T]$, por

$$t\,(\tau(t)) = t\,, \quad \forall t \in [a, b]\,,$$

argumentos similares aos usadas na demonstração do Lema 8 justificam a conclusão pretendida por cálculo directo. ■

Se pegarmos num triplo $(t(\tau), z(\tau), v(\tau))$ construído de acordo com o Lema 9 e lhe aplicarmos o procedimento descrito pelo Lema 8, obteremos o mesmo par $(x(\cdot), u(\cdot))$ de que partimos no Lema 9. Deste modo podemos afirmar que os Lemas 8 e 9 estabelecem um mapeamento dos conjuntos admissíveis dos problemas (P) e (2.1). Dado um Problema (P) é assim possível considerar um problema equivalente na forma (2.1). Segue-se dos Lemas 8 e 9 não só que os conjuntos admissíveis podem ser obtidos um a partir do outro mas também que os valores óptimos para estes dois problemas são o mesmo. Veremos no Capítulo 4 que existe, também, uma certa relação entre o conjunto de extremais dos dois problemas.

A relação entre os conjuntos admissíveis foi estabelecida tendo por pressuposto que Ω é um conjunto compacto. Sob certas condições em $L\,(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\varphi\,(\cdot,\cdot,\cdot)$ e $\Upsilon\,(\cdot,\cdot,\cdot)$, é possível estabelecer a mesma relação mesmo quando os controlos são não limitados. Isso é conseguido usando uma técnica de compactificação do espaço de controlos admissíveis, proposta inicialmente por Gamkrelidze.

Suponhamos então que as variáveis de controlo tomam os seus valores em $\Omega = \mathbb{R}^r, \mathcal{U} = L_1^r$. Vamos ilustrar o método para o caso em que o problema (P) apresenta dinâmica afim de controlo,

$$\varphi(t,x,u) = f(t,x) + g(t,x) \cdot u\,, \tag{2.6}$$

sob as hipóteses

(H1) – *condição de característica completa*: $g(t,x)$ tem característica r para todo o $t \in [a,b]$ e $x \in \mathbb{R}^n$;

(H2) – *coercividade*: existe uma função $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante $\zeta \in \mathbb{R}$ tais que[1]

$$L(t,x,u) \geq \theta(\|u\|) > \zeta\,,$$

para todo o $(t,x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, e

$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{\nu}{\theta(\nu)} = 0\,;$$

e onde em (2.1) a função $\Upsilon(\cdot,\cdot,\cdot)$ é dada por

$$\Upsilon(t,x,u) = \frac{1}{L(t,x,u)}$$

e $\tau_a = 0$. Esta situação ser-nos-á particularmente útil no Capítulo 6 (cf. Teorema 92) para o estabelecimento de novas condições de regularidade Lipschitziana para as trajectórias minimizantes do problema original (P). À *priori*, o controlo $v(\tau)$ em (2.1) pode ser não limitado, mas o conjunto de velocidades

$$\left\{ \left(\frac{1}{L(t,\,z,\,v)}, \frac{\varphi(t,z,v)}{L(t,z,v)} \right) : v \in \mathbb{R}^r \right\} \tag{2.7}$$

é limitado sob as hipóteses (H1) e (H2). Com efeito, para $(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ fixo, o conjunto (2.7) não é fechado mas torna-se compacto se lhe adicionarmos o ponto $(0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ correspondente ao 'valor infinito' do controlo $v \in \mathbb{R}^r$. O conjunto

$$E(t,z) = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{L(t,z,v)}, \frac{\varphi(t,z,v)}{L(t,z,v)} \right) : v \in \mathbb{R}^r \right\}$$

[1] Como observámos na Secção 1.7, basta considerar em (H2) o caso especial em que $\zeta = 0$.

pode ser representado como a imagem homeomórfica da esfera r-dimensional $S^r \approx \overline{\mathbb{R}^r}$. Este homeomorfismo é definido de uma maneira standard: fixamos um ponto $\hat{w} \in S^r$, chamado pólo norte, e consideramos a projecção estereográfica

$$\pi : S^r \setminus \{\hat{w}\} \to \mathbb{R}^r\,. \tag{2.8}$$

Obviamente $\pi|_{S^r\setminus\{\hat{w}\}}$ é contínua e $\lim\limits_{w\to\hat{w}} \|\pi\,(w)\| = +\infty$. As funções

$$w \to \frac{1}{L\,(t,z,\pi(w))} \quad \text{e} \quad w \to \frac{\varphi\,(t,z,\pi(w))}{L\,(t,z,\pi(w))} \tag{2.9}$$

são contínuas em $S^r \setminus \{\hat{w}\}$, uma vez que $L\,(t,z,\pi(w)) > 0$. Devido às hipóteses (H1) e (H2)

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{\|\varphi\,(t,z,v)\|}{\theta\,(\|v\|)} = 0$$

e portanto

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{\|\varphi\,(t,z,v)\|}{L\,(t,z,v)} = 0\,. \tag{2.10}$$

Consequentemente, podemos extender as funções definidas por (2.9) a funções $\phi^{t,z}(\cdot)$ e $h^{t,z}(\cdot)$ que são contínuas em toda a esfera S^r (no espaço compactificado $\overline{\mathbb{R}^r}$):

$$\phi^{t,z}(w) = \phi(t,z,w) = \begin{cases} \dfrac{1}{L\,(t,z,\pi(w))} & \text{se} \quad w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se} \quad w = \hat{w} \end{cases},$$

$$h^{t,z}(w) = h(t,z,w) = \begin{cases} \dfrac{\varphi\,(t,z,\pi(w))}{L\,(t,z,\pi(w))} & \text{se} \quad w \neq \hat{w} \\ 0 & \text{se} \quad w = \hat{w} \end{cases}.$$

Dada (H1), a aplicação

$$w \to \left(\phi^{t,z}(w),\, h^{t,z}(w)\right)\,,$$

de S^r em $E(t,z)$, é contínua e injectiva e, por isso, um homeomorfismo uma vez que S^r é compacto. Desta forma obtém-se o seguinte problema de controlo óptimo autónomo:

$$T \longrightarrow \min \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} t'(\tau) &= \phi\,(t(\tau),\, z(\tau),\, w(\tau)) \\ z'(\tau) &= h\,(t(\tau),\, z(\tau),\, w(\tau)) \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} w : \mathbb{R} \to S^r \\ t(0) = a \quad , \quad t(T) = b\,, \end{gathered} \tag{2.13}$$

com um conjunto compacto S^r de valores dos parâmetros de controlo.

Proposição 10 *A todo o par* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *satisfazendo* $\dot{x} = f(t,x) + g(t,x) \cdot u$ *corresponde uma trajectória* $(t(\tau), z(\tau), w(\tau))$ *do sistema* (2.12) *com* $w(\tau) \neq \hat{w}$ *em quase todos os* $\tau \in [0,T]$ *e vice versa. Além disso, o tempo de transferência* T *associado a este último triplo iguala o valor* $I[x(\cdot), u(\cdot)]$*:*

$$T = I[x(\cdot), u(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), u(t))\, \mathrm{d}t\,.$$

Demonstração. Podemos definir $(t(\tau), z(\tau), w(\tau))$ colocando

$$t(\tau) - \text{a função inversa de } \tau(t) = \int_a^t L(\theta,\, x(\theta),\, u(\theta))\, \mathrm{d}\theta\,,$$

$$\begin{gathered} z(\tau) = x(t(\tau))\,, \quad w(\tau) = \pi^{-1}(u(t(\tau)))\,, \\ 0 \leq \tau \leq T = I[x(\cdot), u(\cdot)]\,, \end{gathered}$$

onde $\pi^{-1}(\cdot)$ é a aplicação inversa de (2.8). A função $z(\cdot)$ é absolutamente contínua, uma vez que é a composição de uma função absolutamente contínua com outra absolutamente contínua e estritamente monótona. A função $w(\cdot)$ é mensurável porque $\pi^{-1}(\cdot)$ é uma função contínua, $u(\cdot)$ é mensurável e $t(\cdot)$ uma função absolutamente contínua e estritamente monótona. Da definição de $(t(\tau), z(\tau), w(\tau))$ vem que

$$\frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{L(t(\tau), z(\tau), \pi(w(\tau)))},$$

$$\frac{\mathrm{d}z(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\varphi(t(\tau), z(\tau), \pi(w(\tau)))}{L(t(\tau), z(\tau), \pi(w(\tau)))}\,,$$

e $w(\tau) \neq \hat{w}$ para quase todos os $\tau \in [0,T]$, uma vez que $u(\cdot)$ tem valores finitos quase sempre e $t(\cdot)$ é estritamente monótona.

Vamos mostrar que toda a solução de (2.12), com $w(\tau) \neq \hat{w}$ *q.t.p.*, resulta desta correspondência. Tomando a função absolutamente contínua $\tau(t)$, $a \leq t \leq b$, que é a inversa da função estritamente monótona e absolutamente contínua $t(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$, fazemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & z(\tau(t)) \\ u(t) & = & \pi(w(\tau(t))) \end{array} \right. , \qquad a \leq t \leq b\,.$$

A curva $x(\cdot)$ definida desta maneira é absolutamente contínua (porque $z(\cdot)$ e $\tau(\cdot)$ são absolutamente contínuas e $\tau(\cdot)$ é estritamente monótona). A função $u(\cdot)$ é mensurável pois $\pi(\cdot)$ é contínua, $w(\cdot)$ é mensurável e $\tau(\cdot)$ é contínua e monótona. Também

$$\int_a^b \|u(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \|\pi(w(\tau(t)))\| \, \mathrm{d}t = \int_0^T \left\| \frac{\pi(w(\tau))}{L(t(\tau), z(\tau), \pi(w(\tau)))} \right\| \mathrm{d}\tau \,.$$

Como a última função integranda é limitada, devido à condição de coercividade, concluímos que $u(\cdot)$ é integrável em $[a, b]$. Diferenciando $x(t)$ em relação a t, obtemos que

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z(\tau(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z(\tau(t))}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi(t, x(t), u(t))$$

para quase todos os $t \in [a, b]$. Integrando

$$\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = L(t, z(\tau(t)), \pi(w(\tau(t)))) = L(t, x(t), u(t))$$

obtém-se

$$I[x(\cdot), u(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), u(t)) \, \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \tau(b) - \tau(a) = T \,.$$

■

2.3 Passagem a uma forma paramétrica

Considerando t como uma variável dependente, introduzimos uma transformação Lipschitziana bijectiva $[a,\, b] \ni t \longmapsto \tau \in [\tau_a,\, \tau_b]$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} t(\tau) > 0$, $\tau_a \leq \tau \leq \tau_b$, tal que

$$L(t,\, x(t),\, u(t)) \, \mathrm{d}t = L(t(\tau),\, x(t(\tau)),\, u(t(\tau))) \, \frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} x(t(\tau)) = \frac{\mathrm{d}x(t(\tau))}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \varphi(t(\tau),\, x(t(\tau)),\, u(t(\tau))) \, \frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \,.$$

Deste modo, se introduzirmos as notações $z(\tau) = x(t(\tau))$ e $w(\tau) = u(t(\tau))$, o problema (P) toma a forma

$$J[t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)] = \int_{\tau_a}^{\tau_b} L(t(\tau), z(\tau), w(\tau)) \, v(\tau) \, \mathrm{d}\tau \longrightarrow \min$$
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} t(\tau) = v(\tau) \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} z(\tau) = \varphi(t(\tau), z(\tau), w(\tau)) \, v(\tau) \end{cases} \qquad (P_\tau)$$

$$t(\tau_a) = a,\ t(\tau_b) = b,$$
$$t(\cdot) \in W_{1,\infty}\left([\tau_a,\ \tau_b];\ [a, b]\right),\ z(\cdot) \in W_{1,1}\left([\tau_a,\ \tau_b];\ \mathbb{R}^n\right),$$
$$v(\cdot) \in L_\infty\left([\tau_a, \tau_b];\ \mathbb{R}^+\right),\ w(\cdot) \in \mathcal{U}\left([\tau_a, \tau_b];\ \Omega\right).$$

Neste novo problema as variáveis de estado são $t(\tau)$ e $z(\tau)$ enquanto os controlos são $v(\tau)$ e $w(\tau)$. O facto da variável de controlo $v(\cdot)$ tomar apenas valores estritamente positivos, garante que $t(\tau)$ tem uma função inversa $\tau(t)$. No Capítulo 5 usaremos $\mathcal{U} = L_\infty$, enquanto no Capítulo 6 $\mathcal{U} = L_1$.

Por um quaterno admissível para o problema (P_τ) entendemos um quaterno de funções $(t(\tau), z(\tau), v(\tau), w(\tau))$, definido no intervalo $[\tau_a, \tau_b]$, tais que as funções $t(\cdot)$ e $z(\cdot)$ são absolutamente contínuas, as funções $v(\cdot)$ e $w(\cdot)$ são mensuráveis, $v(\tau) > 0$ e limitada, e as equações diferenciais em (P_τ) são satisfeitas em quase todos os pontos de $[\tau_a, \tau_b]$. Vamos começar por determinar a relação entre os pares admissíveis para o problema (P) e os quaternos admissíveis para o problema (P_τ).

Lema 11 *Se $(t(\tau), z(\tau), v(\tau), w(\tau))$, $\tau \in [\tau_a, \tau_b]$, é um quaterno admissível de (P_τ), então o par*

$$(x(t), u(t)) = (z(\tau(t)), w(\tau(t))) \qquad t \in [a, b],$$

onde $\tau(\cdot)$ é a função inversa de $t(\cdot)$, é admissível para (P). *Além disso,*

$$I\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] = J\left[t(\tau), z(\tau), v(\tau), w(\tau)\right]. \tag{2.14}$$

Demonstração. Uma vez que definida pela composição de uma função absolutamente contínua $z(\cdot)$ com a função absolutamente contínua e estritamente monótona $\tau(\cdot)$,

$$\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{v\left(\tau(t)\right)} > 0, \tag{2.15}$$

a função $x(\cdot)$ é absolutamente contínua. Temos que $u(\cdot) = w\left(\tau(\cdot)\right) \in \mathcal{U}\left([a, b]; \mathbb{R}^r\right)$, com $\mathcal{U} = L_1$ ou $\mathcal{U} = L_\infty$, porquanto o resultado da composição de $w(\cdot) \in \mathcal{U}\left([\tau_a, \tau_b]; \mathbb{R}^r\right)$ com a função $W_{1,1}$-monótona $\tau : [a, b] \longrightarrow [\tau_a, \tau_b]$. Diferenciando $x(\cdot)$ obtemos:

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z\left(\tau(t)\right)}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Do sistema de controlo do problema (P_τ) e de (2.15), concluímos da última igualdade que

$$\dot{x}(t) = \frac{\varphi\left(t(\tau(t)), z(\tau(t)), w(\tau(t))\right)\ v\left(\tau(t)\right)}{v(\tau(t))} = \varphi\left(t, x(t), u(t)\right).$$

Para finalizar, demonstramos a igualdade (2.14). Por definição,

$$\begin{aligned} I\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] &= \int_a^b L\left(t,\, x(t),\, u(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b L\left(t(\tau(t)),\, z(\tau(t)),\, w(\tau(t))\right) \mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Fazendo a mudança de variável $\tau(t) = \tau$,

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{d}t = v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ \tau = \tau_a \Leftrightarrow t = a \\ \tau = \tau_b \Leftrightarrow t = b\,, \end{array}\right. \tag{2.17}$$

resulta de (2.16) a conclusão pretendida:

$$I\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] = \int_{\tau_a}^{\tau_b} L\left(t(\tau), z(\tau), w(\tau)\right)\, v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = J\left[t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)\right]\,.$$

■

Lema 12 *Se* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *é um par admissível de* (P) *então, para todo o*

$$v(\cdot) \in L_\infty\left([\tau_a, \tau_b];\, \mathbb{R}^+\right)\,,\; \int_{\tau_a}^{\tau_b} v(\theta)\, d\theta = b - a\,, \tag{2.18}$$

o quaterno $(t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot))$ *é admissível para* (P_τ) *com*

$$t(\tau) = a + \int_{\tau_a}^{\tau} v(\theta)\, d\theta\,,$$

$$z(\tau) = x(t(\tau))\,, \quad w(\tau) = u(t(\tau))\,.$$

Além disso,

$$J\left[t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)\right] = I\left[x(\cdot), u(\cdot)\right]\,. \tag{2.19}$$

Demonstração. A função $t(\cdot)$ é Lipschitziana já que

$$\frac{\mathrm{d}t(\cdot)}{\mathrm{d}\tau} = v(\cdot) \in L_\infty\left([\tau_a, \tau_b];\, \mathbb{R}^+\right)\,.$$

A função $z(\cdot)$ é absolutamente contínua uma vez que é definida pela composição da função absolutamente contínua $x(\cdot)$ com a função Lipschitziana e estritamente monótona $t(\cdot)$:

$$\frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = v(\tau) > 0\,. \tag{2.20}$$

A função $w(\cdot)$ é mensurável à Lebesgue porque $u(\cdot)$ é mensurável e $t(\cdot)$ uma função absolutamente contínua e estritamente crescente. A demonstração segue por cálculos directos. Diferenciando $z(\cdot)$ obtemos:

$$z'(\tau) = \frac{\mathrm{d}z(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x\left(t(\tau)\right)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,.$$

Face ao sistema de controlo de (P) e a (2.20), concluímos desta última igualdade que

$$\begin{aligned} z'(\tau) &= \varphi\left(t(\tau), x(t(\tau)), u(t(\tau))\right)\, v(\tau) \\ &= \varphi\left(t(\tau), z(\tau), w(\tau)\right)\, v(\tau)\,, \end{aligned}$$

enquanto da definição de $t(\tau)$ e $v(\tau)$ temos que $t(\tau_a) = a$ e $t(\tau_b) = b$. Resta apenas provar a igualdade (2.19). Uma vez que

$$\begin{aligned} J\left[t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)\right] &= \int_{\tau_a}^{\tau_b} L\left(t(\tau), z(\tau), w(\tau)\right)\, v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\tau_a}^{\tau_b} L\left(t(\tau),\, x(t(\tau)),\, u(t(\tau))\right)\, v(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \end{aligned} \tag{2.21}$$

da mudança de variável $t(\tau) = t$, resulta de (2.17) e (2.21) a conclusão pretendida:

$$J\left[t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)\right] = \int_a^b L\left(t, x(t), u(t)\right)\,\mathrm{d}t = I\left[x(\cdot), u(\cdot)\right]\,.$$

■

Dos Lemas 11 e 12, os seguintes dois corolários são óbvios.

Corolário 13 *Se* $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ *é um minimizante do problema* (P)*, então, para qualquer função* $\tilde{v}(\cdot)$ *a satisfazer* (2.18) *(e.g.* $\tilde{v}(\tau) \equiv \frac{b-a}{\tau_b-\tau_a}$*), o quaterno*

$$\left(\tilde{t}(\cdot), \tilde{z}(\cdot), \tilde{v}(\cdot), \tilde{w}(\cdot)\right)\,,$$

definido por $\tilde{t}(\tau) = a + \int_{\tau_a}^{\tau} \tilde{v}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, $\tilde{z}(\tau) = \tilde{x}\left(\tilde{t}(\tau)\right)$, $\tilde{w}(\tau) = \tilde{u}\left(\tilde{t}(\tau)\right)$*, é um minimizante do problema* (P_τ)*.*

Corolário 14 *Se* $\left(\tilde{t}(\cdot), \tilde{z}(\cdot), \tilde{v}(\cdot), \tilde{w}(\cdot)\right)$ *é um minimizante do problema* (P_τ)*, então o par* $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$*, definido a partir de* $\left(\tilde{t}(\cdot), \tilde{z}(\cdot), \tilde{v}(\cdot), \tilde{w}(\cdot)\right)$ *como no Lema 11, é um minimizante do problema* (P)*.*

O problema *infra* é o mesmo que o problema (P_τ), excepto com a diferença de que $w(\cdot) \in \mathcal{U}\left([\tau_a, \tau_b]; \Omega\right)$ está fixo e a funcional é para ser minimizada somente em $t(\cdot)$, $z(\cdot)$ (as variáveis de estado) e $v(\cdot)$ (a variável de controlo).

$$
K\left[t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot)\right] = \int_{\tau_a}^{\tau_b} F\left(\tau, t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right) \mathrm{d}\tau \longrightarrow \min\,,
$$

$$
\left[\begin{array}{l}
t(\cdot) \in W_{1,\infty}\left([\tau_a, \tau_b];\, [a,b]\right),\ z(\cdot) \in W_{1,1}\left([\tau_a, \tau_b];\, \mathbb{R}^n\right) \\
\qquad\qquad v(\cdot) \in L_{\infty}\left([\tau_a, \tau_b];\, \mathbb{R}^+\right) \\
\qquad \begin{cases} t'(\tau) = v(\tau) \\ z'(\tau) = f\left(\tau, t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right) \end{cases} \\
\qquad\qquad t(\tau_a) = a, \quad t(\tau_b) = b\,.
\end{array}\right. \qquad (P_\tau[w(\cdot)])
$$

onde $F(\tau,t,z,v) = L\left(t,z,w(\tau)\right) v$, $f(\tau,t,z,v) = \varphi\left(t,z,w(\tau)\right) v$.

Observação 15 *O Problema* (P_τ) *é autónomo enquanto* (P) *e* $(P_\tau[w(\cdot)])$ *não.*

Seja $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ um minimizante para o problema (P). Do Corolário 13 sabemos como construir um minimizante $\left(\tilde{t}(\cdot), \tilde{z}(\cdot), \tilde{v}(\cdot), \tilde{w}(\cdot)\right)$ para o problema (P_τ). Obviamente, uma vez que o problema $(P_\tau[\tilde{w}(\cdot)])$ é o mesmo que o problema (P_τ) excepto que $\tilde{w}(\cdot)$ está fixo, $\left(\tilde{t}(\cdot), \tilde{z}(\cdot), \tilde{v}(\cdot)\right)$ fornece o valor mínimo à funcional $K[\cdot,\cdot,\cdot]$ do problema $(P_\tau\left[\tilde{w}(\cdot)\right])$. Escolhendo $\tilde{v}(\tau) \equiv \frac{b-a}{\tau_b-\tau_a}$ obtemos.

Proposição 16 *Se* $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ *é um minimizante do problema* (P)*, então o terno*

$$
\left(\tilde{t}(\tau), \tilde{z}(\tau), \tilde{v}(\tau)\right) = \left(a + \frac{(b-a)(\tau-\tau_a)}{\tau_b-\tau_a}, \tilde{x}\left(a + \frac{(b-a)(\tau-\tau_a)}{\tau_b-\tau_a}\right), \frac{b-a}{\tau_b-\tau_a}\right)
$$

é minimizante para o problema $(P_\tau[\tilde{w}(\cdot)])$, $\tilde{w}(\tau) = \tilde{u}\left(a + \frac{(b-a)(\tau-\tau_a)}{\tau_b-\tau_a}\right)$.

É igualmente importante saber como as extremais de Pontryagin (Capítulo 3) dos problemas estão relacionadas. Este assunto será abordado no Capítulo 4.

2.4 Consignação

Neste capítulo estabelecemos a relação entre os pares admissíveis e, em particular, entre as soluções, de dois problemas de controlo óptimo equivalentes sob dois tipos de transformações que envolvem mudança do tempo: transformações do tipo de Gamkrelidze e passagem a uma forma paramétrica.

A técnica de compactificação apresentada na Secção 2.2 foi proposta por Gamkrelidze em [111, Cap. 8], no âmbito do cálculo das variações e do seu problema fundamental. Um exemplo concreto de aplicação da compactificação à Gamkrelidze, para o problema de paragem de um comboio, num instante fixo do tempo e com o mínimo gasto de energia, pode ser encontrado em [3, §4.3]. Para este problema o teorema de existência de Filippov não pode ser aplicado directamente. A introdução da nova variável de tempo, conforme exposto na Secção 1.7, seguida de compactificação, já permite, contudo, a aplicação do teorema de Filippov e concluir pela existência de um controlo óptimo. A aplicação da compactificação ao estudo da regularidade Lipschitziana apareceu em primeiro lugar em [263, Parte Original] e mais tarde em [217].

A condição de coercividade é também conhecida por condição de Nagumo. A designação é, no entanto, como acontece aliás muitas vezes em matemática, incorrecta. Antes da coercividade ter sido usada nos trabalhos de M. Nagumo, nos anos trinta, foi usada por L. Tonelli para provar a existência de solução para os problemas do cálculo das variações e, ainda antes, por S. N. Bernstein (*vide* [146]).

A ideia de *reparametrização do tempo* que introduzimos em §2.3 é originária de Weierstrass e tem as suas raízes no cálculo das variações clássico, quando o problema fundamental do cálculo das variações é considerado na forma paramétrica (*vide* v.g. [116, pp. 38–40]). Esta mudança de tempo provou ser útil nos mais diversos contextos (*vide* v.g. [116, Sec. 10], [88, 89], [121, Lec. 13], [52, p. 46], [11], [4], [62], [173, Ch. 5], [137, p. 29], [295, Sec. 11.5], [157, §4.2] e [275]). A sua generalização a problemas do controlo óptimo parece ser devida a McShane (cf. [52]) e será profícua para a obtenção de um teorema geral do tipo de Noether, no Capítulo 5, e para o estabelecimento da regularidade Lipschitziana das trajectórias minimizantes para problemas com sistema de controlo não linear, no Capítulo 6.

Os resultados obtidos constituem o preâmbulo ao estudo da relação entre as extremais, conduzido no Capítulo 4, após a sua adequada caracterização no próximo Capítulo 3. Estamos convencidos que existem implicações mais profundas dos resultados deste capítulo por explorar. A inter-relação com o método de Cartan permanece ainda por clarificar. O artigo original [48] de Cartan (*vide* [115, pp. 109–122] para uma tradução em inglês) não é de fácil leitura. Gardner [115] confessa-nos ter necessitado de vinte anos para o compreender. As peias, essas, só nos podem motivar e a ligação do método de Cartan ao controlo óptimo está sob cogitação.

"Discovery consists of seeing what everybody has seen and thinking what nobody has thought."

—Albert Szent-Györgyi

3

Uma propriedade das extremais de Pontryagin

Estabelecem-se condições para que uma função $F(t, x, u, \psi_0, \psi)$ satisfaça a relação $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial \psi} - \frac{\partial F}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial H}{\partial x}$ ao longo das extremais de Pontryagin $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ de um problema de controlo óptimo, onde H é o respectivo Hamiltoniano. A relação generaliza o facto bem conhecido de que a igualdade $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}$ se verifica ao longo das extremais do problema e que no caso autónomo $H \equiv constante$. Como aplicações da nova relação, mostramos como se podem obter quantidades conservadas ao longo das extremais de Pontryagin (assunto que será desenvolvido no Capítulo 5) e como caracterizar problemas fruindo certos primeiros integrais.

3.1 Intróito

O princípio do máximo de Pontryagin, a célebre condição necessária de primeira ordem, cujas soluções são chamadas de extremais (de Pontryagin) e que são obtidas através de uma função H chamada Hamiltoniano, com papel comparável à função Lagrangeana dos problemas de optimização clássicos do cálculo (*vide* v.g. [196, 226]), constitui o âmago da teoria matemática do controlo óptimo. Para problemas do controlo óptimo autónomos, i.e. quando o Hamiltoniano H não depende explicitamente da variável independente tempo, t, uma propriedade essencial das extremais de Pontryagin é a característica notável de que o correspondente Hamiltoniano é constante ao longo das extremais (*vide* v.g. [199, 111]). Na mecânica clássica esta propriedade corresponde à *conservação de energia* (*vide* v.g. [149, 209]), enquanto no cálculo das variações ela corresponde à segunda *condição necessária de Erdmann* (*vide* v.g. [58]). Para problemas do controlo óptimo que dependem explicitamente do tempo t (problemas não autónomos), a propriedade ascende ao facto de que a derivada total do respectivo Hamiltoniano em relação ao tempo iguala a derivada parcial do Hamiltoniano em relação ao tempo:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right) = \frac{\partial H}{\partial t}\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right) \tag{3.1}$$

para quase todos os t (*vide* v.g. [199, 26, 97]). A condição (3.1) corresponde, no cálculo das variações, à condição necessária de DuBois-Reymond (*vide* v.g. [52]). Aplicações recentes, em diversos contextos do cálculo das variações e controlo óptimo, mostram a natureza fundamental da propriedade (3.1). Foi usada em [69, 11, 217] para estabelecer a regularidade Lipschitziana das trajectórias minimizantes (cf. o Capítulo 6); em [62] para se estabelecerem novos resultados de existência; e em [270, 275] (cf. o Capítulo 5) para a demonstração de algumas generalizações do primeiro teorema de Noether. As técnicas usadas na prova da relação (3.1) são também muito úteis e têm sido aplicadas em contextos muito diversos, alguns dos quais bem longínquos do controlo óptimo e cálculo das variações (*vide* v.g. [107]).

Neste capítulo damos condições sob as quais uma função $F(t, x, u, \psi_0, \psi)$ satisfaz a igualdade

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial \psi} - \frac{\partial F}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial H}{\partial x}\,, \tag{3.2}$$

quase sempre, ao longo das extremais de Pontryagin. Para $F = H$ a igualdade (3.2) reduz-se a (3.1). Como corolário, obtemos uma condição necessária e suficiente para $F\left(t, x, u, \psi_0, \psi\right)$ ser um primeiro integral (Definição 32). Munidos desta condição, é possível encontrar leis de conservação explicitamente dependentes do controlo e que não são *momentum maps*,[1] isto é, podemos encontrar quantidades $F\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right)$ preservadas ao longo das extremais de Pontryagin $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ do problema, que não são da forma $\psi(t) \cdot C\left(x(t)\right)$ (cf. [171, Cap. 11]). Esta é uma particularidade importante, já que em contraste com os resultados obtidos em [31], onde as quantidades conservadas são sempre da forma $\psi(t) \cdot C\left(x(t)\right)$. Esta possibilidade será explorada em detalhe no Capítulo 5, onde estabelecemos uma versão muito mais abrangente do teorema de Noether. A nossa condição proporciona também um método para a caracterização de problemas de controlo óptimo com leis de conservação dadas. Todas estas possibilidades serão ilustradas com exemplos.

[1]O conceito de *momentum map* foi introduzido por Souriau – cf. [300, pp. 15–21].

3.2 O princípio do máximo de Pontryagin

Vamos agora formular o famoso princípio do máximo de Pontryagin [199] para (P) (cf. página 20), que é, como já tivemos oportunidade de referir, uma condição necessária de optimalidade de primeira ordem. O princípio do máximo oferece uma generalização das condições clássicas de optimalidade de primeira ordem do cálculo das variações e pode tratar problemas em que limites superiores e/ou inferiores são impostos às variáveis de controlo. Detalhes podem ser encontrados em [199].

Teorema 17 (Princípio do máximo de Pontryagin) *Seja* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *um minimizante do problema de controlo óptimo* (P) *com* $\mathcal{U} = L_\infty([a, b]; \Omega)$. *Então, existe um par não nulo* $(\psi_0, \psi(\cdot))$, *onde* $\psi_0 \leq 0$ *é uma constante e* $\psi(\cdot)$ *uma função* n*-vectorial absolutamente contínua (*$\psi(t)$ *é um covector* $1 \times n$*), de domínio* $[a, b]$*, de tal modo que o quaterno* $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ *satisfaz as seguintes condições em quase todos os* t*'s do intervalo* $[a, b]$*:*

(i) *o sistema Hamiltoniano*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \dfrac{\partial H\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right)}{\partial \psi}\,, \\[2ex] \dot{\psi}(t) &= -\dfrac{\partial H\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right)}{\partial x}\,; \end{cases} \tag{3.3}$$

(ii) *a condição de máximo*

$$H\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right) = M\left(t, x(t), \psi_0, \psi(t)\right) = \sup_{v \in \Omega} H\left(t, x(t), v, \psi_0, \psi(t)\right)\;; \tag{3.4}$$

com Hamiltoniano

$$H(t, x, u, \psi_0, \psi) = \psi_0 L(t, x, u) + \psi \cdot \varphi(t, x, u)\,. \tag{3.5}$$

Existem muitas generalizações e modificações do princípio do máximo de Pontryagin. Por exemplo, um princípio do máximo sob pressupostos menos restritivos em relação à suavidade dos dados, pode ser encontrado em [57, 166, 231]. Voltaremos a este assunto no Capítulo 6. Com excepção da Secção 6.2.3, a versão clássica apresentada no Teorema 17 ser-nos-á suficiente.

Observação 18 *A primeira equação do sistema Hamiltoniano* (3.3) *não é mais do que o sistema de controlo de* (P)*. A segunda equação,*

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}\left(t,\, x(t),\, u(t),\, \psi_0,\, \psi(t)\right)\,, \tag{3.6}$$

é conhecida por sistema adjunto*.*

Definição 19 *Um quaterno* $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$*,* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *admissível e* $\psi_0 \in \mathbb{R}_0^-$*,* $\psi(\cdot) \in W_{1,1}([a,b];\mathbb{R}^n)$*, que satisfaça o sistema adjunto* (3.6) *e a condição de máximo (ii) do Teorema 17, é chamado de extremal (de Pontryagin) para o problema* (P)*. O controlo* $u(\cdot)$ *é chamado de controlo extremal.*

Observação 20 *Uma extremal de Pontryagin* $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ *é chamada* normal *se* $\psi_0 \neq 0$ *e* anormal *se* $\psi_0 = 0$*. Dizemos que* $u(\cdot)$ *é um controlo extremal anormal se lhe for possível associar uma extremal anormal* $(x(\cdot), u(\cdot), 0, \psi(\cdot))$*. Uma vez que o Hamiltoniano é homogéneo em relação aos multiplicadores Hamiltonianos, para as extremais normais podemos sempre considerar, por escalonamento, que* ψ_0 *toma o valor* -1*.*

Observação 21 *Se* $(x(\cdot),\, u(\cdot))$ *é um minimizante de* (P)*, com* $\mathcal{U} = L_\infty([a,\, b];\, \Omega)$*, então o princípio do máximo de Pontryagin diz que existe um par não nulo* $(\psi_0,\, \psi(\cdot))$ *tal que* $(x(\cdot),\, u(\cdot),\, \psi_0,\, \psi(\cdot))$ *é uma extremal de Pontryagin de* (P)*.*

Observação 22 *Diferente terminologia para o Hamiltoniano* H (3.5) *pode ser encontrada na literatura. A função* H *é por vezes chamada de* Hamiltoniano por maximizar*,* pseudo Hamiltoniano *ou* função de Pontryagin*. O sistema Hamiltoniano é também conhecido por sistema pseudo Hamiltoniano.*

Observação 23 *Podem surgir condições extra no princípio do máximo de Pontryagin, chamadas* condições de transversalidade*. Estas condições dependem das condições de fronteira específicas sob consideração no problema* (P)*. Os nossos métodos não requerem, contudo, o uso de tais condições de transversalidade e, conforme dissemos no Capítulo 1, os resultados originais do trabalho são válidos para condições de fronteira arbitrárias.*

Observação 24 *A condição de máximo é um problema de optimização estático. O método de resolução do problema de controlo óptimo* (P)*, via princípio do máximo, consiste em encontrar as soluções do sistema Hamiltoniano por eliminação do controlo com a ajuda da condição do máximo. As soluções óptimas procuradas são encontradas entre estas extremais.*

O princípio do máximo de Pontryagin é um *princípio* na verdadeira acepção do termo, podendo ser formulado na forma de teorema das mais diversas formas e nos mais diversos contextos. É possível, por exemplo, formular o princípio do máximo de Pontryagin em variedades (*vide* v.g. [6, Cap. 11]); para problemas de horizonte infinito (*vide* v.g. [157, §3.2]); para problemas impulsivos, onde são permitidos saltos (descontinuidades) nas trajectórias admissíveis (*vide* v.g. [296, 195], [157, §3.3]); para problemas com restrições de estado (*vide* v.g. [81, 101, 82]); com restrições mistas (*vide* v.g. [84, 85, 83], [82, Ch. 8]); etc.

A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada, por exemplo, em [199, 26].

Teorema 25 *Se* $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ *é uma extremal, então a função* $H(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t))$ *é uma função absolutamente contínua em* t *e satisfaz a igualdade* (3.1)*, onde no primeiro membro temos a derivada total em relação a* t *e no segundo a derivada parcial do Hamiltoniano em relação a* t.

Como caso particular do Teorema 25, quando o Hamiltoniano não depende explicitamente de t, isto é, quando o problema de controlo óptimo é autónomo – as funções L e φ não dependem directamente de t – então o valor do Hamiltoniano, calculado ao longo de uma extremal de Pontryagin $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ do problema, resulta constante:

$$H(x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)) \equiv const\,, \quad t \in [a, b]\,. \tag{3.7}$$

Notamos que o Teorema 25 é uma consequência do princípio do máximo de Pontryagin. Vamos generalizá-lo na Secção 3.3. Antes, porém, revemos alguns factos da análise funcional oportunos na demonstração do nosso resultado.

Introduzimos, primeiro, o conceito de função absolutamente contínua em t, uniformemente em relação a s.

Definição 26 *Seja* $\phi(s, t)$ *uma função de valor real definida em* $[a, b] \times [a, b]$*. Dizemos que* $\phi(s, t)$ *é uma função absolutamente contínua em* t*, uniformemente em relação a* s*, se, dado* $\varepsilon > 0$*, existe um* $\delta > 0$*, independente de* s*, tal que para toda a colecção finita de intervalos disjuntos* $(a_j, b_j) \subseteq [a, b]$

$$\sum_j (b_j - a_j) \leq \delta \Rightarrow \sum_j |\phi(s, b_j) - \phi(s, a_j)| \leq \varepsilon \quad (s \in [a, b])\,.$$

A demonstração das seguintes duas proposições pode ser encontrada em [97, p. 74].

Proposição 27 *Seja* $F(t, x, u, \psi_0, \psi)$*,* $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \times \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, uma função diferenciável com continuidade em relação a* t*,* x *e* ψ*, para* u *fixo, e admitamos que existe uma função* $G(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{R})$ *tal que*

$$\left\|\nabla_{(t,x,\psi)} F(t, x(t), u(s), \psi_0, \psi(t))\right\| \leq G(t) \quad (s, t \in [a, b])\,.$$

Então $\phi(s, t) = F(t, x(t), u(s), \psi_0, \psi(t))$ *é absolutamente contínua em* t*, uniformemente em relação a* s*, no intervalo* $[a, b]$.

Proposição 28 *Seja* $\phi(s, t)$*,* $\phi : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$*, uma função absolutamente contínua em*

t, uniformemente em relação a s, satisfazendo

$$\phi(t,t) = \sup_{s\in[a,b]} \phi(s,t)$$

num conjunto denso de $[a,b]$. Então a função $\phi(t,t)$ pode ser estendida, de modo uniformemente contínuo, a uma função $m(t)$ absolutamente contínua em todo o intervalo $[a,b]$.

Observação 29 *O leitor pode encontrar em [97, Exemplo 2.6.6.] todos os detalhes de como a extensão da Proposição 28 pode ser definida. Para os nossos propósitos, é suficiente saber que tal extensão existe.*

3.3 Contribuição original: generalização do Teorema 25

O nosso resultado é uma generalização do Teorema 25.

Teorema 30 *Se $F(t,x,u,\psi_0,\psi)$ é uma função de valor real como na Proposição 27 e, além disso, satisfaz em quase todos os t's do intervalo $[a,b]$ a condição*

$$F(t,x(t),u(t),\psi_0,\psi(t)) = \sup_{v\in\Omega} F(t,x(t),v,\psi_0,\psi(t)) \tag{3.8}$$

ao longo das extremais de Pontryagin $(x(\cdot),u(\cdot),\psi_0,\psi(\cdot))$ do problema de controlo óptimo (P)*, então $t \to F(t,x(t),u(t),\psi_0,\psi(t))$ é absolutamente contínua e a igualdade*

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial \psi} - \frac{\partial F}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3.9}$$

é verificada ao longo das extremais.

Demonstração. A nossa demonstração é uma extensão da demonstração padrão do Teorema 25 (*vide* v.g. [199, 26, 97]). Seja $(x(\cdot),u(\cdot),\psi_0,\psi(\cdot))$ uma extremal de Pontryagin do problema (P). Fazendo $v = u(s)$ em (3.8), obtemos que $\phi(s,t) = F(t,x(t),u(s),\psi_0,\psi(t))$ satisfaz

$$\phi(t,t) \geq \phi(s,t)\,, \quad s\in[a,b]\,, \tag{3.10}$$

para t num conjunto de medida completa em $[a,b]$. A Proposição 28 implica então que $m(t) = \phi(t,t) = F(t,x(t),u(t),\psi_0,\psi(t))$ é uma função absolutamente contínua em $[a,b]$. Resta provar que

$$\dot{m}(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(\pi(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(\pi(t))\cdot\frac{\partial H}{\partial \psi}(\pi(t)) - \frac{\partial F}{\partial \psi}(\pi(t))\cdot\frac{\partial H}{\partial x}(\pi(t))\,,$$

onde $\pi(t) = (t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t))$. Uma vez que

$$\frac{m(t+h) - m(t)}{h} = \frac{\phi(t+h, t+h) - \phi(t, t+h)}{h} + \frac{\phi(t, t+h) - \phi(t,t)}{h}$$

e, pelas hipóteses, o primeiro membro e o segundo termo do segundo membro têm limite quando $h \to 0$, concluímos que existe também limite para o primeiro termo do segundo membro. De (3.10) $\phi(t+h, t+h) \geq \phi(t, t+h)$ e segue-se que $\frac{\phi(t+h,t+h)-\phi(t,t+h)}{h}$ é não negativo quando $h > 0$ e não positivo quando $h < 0$. Deste modo, o seu limite é zero quando $h \to 0$. Obtemos desta maneira que

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{F\left(t+h, x(t+h), u(t), \psi_0, \psi(t+h)\right) - F\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right)}{h} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}\left(\pi(t)\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\left(\pi(t)\right) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial \psi}\left(\pi(t)\right) \cdot \dot{\psi}(t)\,, \end{aligned}$$

e a conclusão é consequência do sistema Hamiltoniano. ■

Corolário 31 *Seja* $F\left(t, x, u, \psi_0, \psi\right)$, $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \times \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *uma função diferenciável com continuidade em relação a* t, x *e* ψ *para* u *fixo; e* $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ *uma extremal de* (P). *Se*

(i) $F\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right)$ *é absolutamente contínua em* t*;*

(ii) $F\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right) = \sup_{v \in \Omega} F\left(t, x(t), v, \psi_0, \psi(t)\right)$ *em q.t.p.* $a \leq t \leq b$*;*

então a igualdade (3.9) *é satisfeita ao longo da extremal.*

Nas Secções 3.4 e 3.5 apresentamos algumas aplicações possíveis do Teorema 30.

3.4 Primeiros integrais

A resolução do sistema Hamiltoniano, por eliminação do controlo com o auxílio da condição de máximo, é, tipicamente, uma tarefa difícil. Por isso, são merecedoras da nossa atenção todas as circunstâncias que tornem a sua solução mais fácil. Este é precisamente o caso quando o sistema Hamiltoniano possui *primeiros integrais* que podem ser usados na redução da dimensão das equações diferenciais (*vide* v.g. [14], [90, Ch. 2 e 3], [228, Módulo 5]) e na construção de métodos numéricos (*vide* v.g. [90, Ch. 4]).

O uso de primeiros integrais na resolução de problemas de controlo óptimo, por integração do sistema Hamiltoniano, está descrito nos trabalhos de van der Schaft [290, 291, 293] (veja-se também [184, Ch. 12] e outras referências aí dadas). Com um número suficientemente grande de primeiros integrais (independentes), é possível resolver o problema completamente por intermédio de tais funções.

Do Teorema 30, obtemos de imediato uma condição necessária e suficiente para uma função ser primeiro integral.

Definição 32 *A uma quantidade* $F(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t))$*, constante em* t *ao longo de todas as extremais de Pontryagin* $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ *de* (P)*, chamamos* primeiro integral.

Observação 33 *Seguindo a terminologia usada comummente (*vide *v.g. [30, p. 554], [147]), chamamos* primeiro integral *à função* $F(t,\, x,\, u,\, \psi_0,\, \psi)$ *que é constante ao longo das extremais de Pontryagin,*

$$F(t,\, x(t),\, u(t),\, \psi_0,\, \psi(t)) = k\,, \tag{3.11}$$

para alguma constante k*, enquanto a equação* (3.11) *é designada por* lei de conservação *correspondente ao primeiro integral* $F(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$*.*

Definição 34 *Uma quantidade* $F(t, x, u, \psi)$ *que é constante ao longo de cada extremal anormal* $(x(\cdot), u(\cdot), 0, \psi(\cdot))$ *de* (P) *será chamada de* primeiro integral anormal. *A respectiva lei de conservação será, em uníssono, denominada* lei de conservação anormal.

Corolário 35 *Sob as condições do Teorema 30,* $F(t, x, u, \psi_0, \psi)$ *é um primeiro integral se, e somente se,*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial \psi} - \frac{\partial F}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{3.12}$$

é satisfeita, quase sempre, ao longo das extremais de Pontryagin do problema de controlo óptimo (P)*.*

Exemplo 36 *(*$n = 4$*,* $r = 2$*,* $\Omega = \mathbb{R}^2$*) Consideremos o problema*

$$\int_a^b \left((u_1(t))^2 + (u_2(t))^2\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,,$$

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_3(t) \\ \dot{x_2}(t) = x_4(t) \\ \dot{x_3}(t) = -x_1(t)\left((x_1(t))^2 + (x_2(t))^2\right) + u_1(t) \\ \dot{x_4}(t) = -x_2(t)\left((x_1(t))^2 + (x_2(t))^2\right) + u_2(t)\,. \end{cases}$$

O Hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) &= \psi_0\left(u_1^2 + u_2^2\right) + \psi_1 x_3 \\ &\quad + \psi_2 x_4 - \psi_3 x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \psi_3 u_1 - \psi_4 x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \psi_4 u_2\,. \end{aligned}$$

Afiançamos que

$$F = -\psi_1 x_2 + \psi_2 x_1 - \psi_3 x_4 + \psi_4 x_3 \tag{3.13}$$

é um primeiro integral do problema. Cálculos directos mostram que

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial \psi_i} - \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial F}{\partial \psi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} = \psi_4 u_1 - \psi_3 u_2 \,. \tag{3.14}$$

Da condição de máximo resulta que $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$ *e* $\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$*, isto é,* $2\psi_0 u_1 + \psi_3 = 0$ *e* $2\psi_0 u_2 + \psi_4 = 0$*. Usando estas últimas duas identidades em* (3.14)*, concluímos do Corolário 35 que* (3.13) *é um primeiro integral.*[2]

3.5 Problemas com um dado primeiro integral

Diligenciamos agora um método para conceber problemas do controlo óptimo com leis de conservação dadas. Se fixarmos uma função F *à priori*, podemos considerar a igualdade (3.12) como uma equação às derivadas parciais, tendo por incógnita o Hamiltoniano H. Se esta equação diferencial admitir uma solução, podemos, obviamente, construir um problema de controlo óptimo que admite F como primeiro integral. Vamos ilustrar esta ideia geral em situações concretas.

Exemplo 37 *O Hamiltoniano H é um primeiro integral se, e somente se,* $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$*. A condição é trivialmente satisfeita para problemas autónomos.*

Exemplo 38 *A função $\psi x + Ht$ é um primeiro integral se, e somente se,* $H = \frac{\partial H}{\partial x}x - \frac{\partial H}{\partial \psi}\psi - \frac{\partial H}{\partial t}t$*. A condição é satisfeita, por exemplo, para problemas da forma* ($0 < a < b$)

$$\int_a^b \frac{L\left(tx(t), u(t)\right)}{t} \mathrm{d}t \longrightarrow \min \,,$$
$$\dot{x}(t) = \frac{\varphi\left(tx(t), u(t)\right)}{t^2} \,.$$

Exemplo 39 *Concluímos, do Corolário 35, que uma condição necessária e suficiente para a função*

$$F = H\psi x \tag{3.15}$$

ser primeiro integral é a de que $\psi x \frac{\partial H}{\partial t} + \psi H \frac{\partial H}{\partial \psi} - Hx\frac{\partial H}{\partial x} = 0$*. Um problema muito simples*

[2] *No Capítulo 5 interpretamos* (3.13) *à luz das quasi-simetrias do problema (cf. Exemplo 81).*

com o primeiro integral (3.15) *é portanto*

$$\int_a^b L\left(u(t)\right) \mathrm{dt} \longrightarrow \min\,, \qquad (3.16)$$
$$\dot{x}(t) = \varphi\left(u(t)\right) x(t)\,.$$

Exemplo 40 *O seguinte problema de optimização é importante no estudo de polinómios cúbicos em variedades Riemannianas (* vide *[44, p. 39] e [225]). Aqui consideramos o caso particular quando temos um espaço de estados 2-dimensional e n controlos:*

$$\int_0^T \left(\left(u_1(t)\right)^2 + \cdots + \left(u_n(t)\right)^2\right) \mathrm{dt} \longrightarrow \min\,, \qquad (3.17)$$
$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2(t)\,, \\ \dot{x_2}(t) = X_1\left(x_1(t)\right) u_1(t) + \cdots + X_n\left(x_1(t)\right) u_n(t)\,. \end{cases}$$

Assumimos que as funções $X_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, n$ são suaves. O Hamiltoniano do problema é dado por

$$H = \psi_0\left(u_1^2 + \cdots + u_n^2\right) + \psi_1 x_2 + \psi_2\left(X_1(x_1)u_1 + \cdots + X_n(x_1)u_n\right)\,.$$

Uma vez que o problema é autónomo, já vimos que o Hamiltoniano é um primeiro integral. Estamos interessados em encontrar um novo primeiro integral para o problema. Procuraremos por um da forma

$$F = k_1\psi_1 x_1 + k_2\psi_2 x_2\,,$$

onde k_1 e k_2 são constantes. Este é um primeiro integral típico, conhecido na literatura por momentum map *(* vide *v.g. [31]). Começamos por notar que*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0\,, \frac{\partial F}{\partial x_1} = k_1\psi_1\,, \frac{\partial F}{\partial x_2} = k_2\psi_2\,, \frac{\partial F}{\partial \psi_1} = k_1 x_1\,, \frac{\partial F}{\partial \psi_2} = k_2 x_2\,,$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_2\left(X_1'(x_1)u_1 + \cdots + X_n'(x_1)u_n\right)\,, \frac{\partial H}{\partial x_2} = \psi_1\,,$$
$$\frac{\partial H}{\partial \psi_1} = x_2\,, \frac{\partial H}{\partial \psi_2} = X_1(x_1)u_1 + \cdots + X_n(x_1)u_n\,.$$

Substituindo estas quantidades em (3.12)*, obtemos que*

$$k_1\psi_1 x_2 + k_2\psi_2\left(X_1(x_1)u_1 + \cdots + X_n(x_1)u_n\right)$$
$$- k_1 x_1 \psi_2\left(X_1'(x_1)u_1 + \cdots + X_n'(x_1)u_n\right) - k_2 x_2 \psi_1 = 0\,.$$

A igualdade é trivialmente satisfeita se $k_1 = k_2$ *e* $X_i'(x_1)x_1 = X_i(x_1)$, $i = 1, \ldots, n$. *Acabámos de demonstrar a seguinte proposição.*

Proposição 41 *Se a condição de homogeneidade*

$$X_i(\lambda x_1) = \lambda X_i(x_1), \quad i = 1, \ldots, n, \forall \lambda > 0, \tag{3.18}$$

for verificada, então $\psi_1(t)x_1(t) + \psi_2(t)x_2(t) = constante$, $t \in [0, T]$, *ao longo das extremais do problema* (3.17).

Estas questões serão aprofundadas no Capítulo 5, a propósito do teorema de Noether (cf. Exemplos 61, 74 e 87; Proposição 84). A demonstração do teorema de Noether na sua forma mais geral (Teorema 69) vai depender da relação entre as extremais estabelecida no próximo Capítulo 4 (Teorema 47).

3.6 Consignação

Os resultados deste capítulo foram apresentados pelo autor, em Julho de 2001, na sessão *Optimal Control and Calculus of Variations* da *4th International Optimization Conference in Portugal*, *Optimization 2001*, University of Aveiro, Portugal, numa palestra intitulada *A Fundamental Property of the Dynamic Optimization Extremals*. Foi escrito o "research report" [268], disponível como E-Print na *Optimization Online*:

http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2001/08/366.html.

O trabalho encontra-se aceite para publicação na revista *Investigação Operacional* [277].

"The structures of mathematics and the propositions about them are ways for the imagination to travel and the wings, or legs, or vehicles to take you where you want to go."

—Scott Buchanan

4

Relação entre as extremais

Generalizamos, para o contexto do controlo óptimo, o conceito de equivalência introduzido em 1906 por Carathéodory para problemas paramétricos do cálculo das variações, investigando a relação entre as extremais de Pontryagin de dois problemas equivalentes no sentido do Capítulo 2.

4.1 Intróito

Como vimos no Capítulo 1, o problema de Lagrange do controlo óptimo pode ser visto como um problema modelo. Problemas diferentes que, mediante transformações adequadas, podem ser reduzidos a um mesmo problema, dizem-se equivalentes, admitindo, como estabelecemos no Capítulo 2, o mesmo mínimo e uma relação directa entre os pares admissíveis. O estabelecimento desta correspondência não é contudo suficiente, sendo importante saber como essas transformações afectam as extremais. Na terminologia de Carathéodory (cf. [46, pp. 205–206] ou [208]), é inclusive a correspondência de extremais, e não a dos problemas, a que define o conceito de equivalência: dois problemas do cálculo das variações dizem-se *equivalentes* se as respectivas equações de Euler-Lagrange são idênticas. De modo semelhante, diremos que dois problemas do controlo óptimo são *equivalentes no sentido de Carathéodory* se possuírem as mesmas extremais de Pontryagin. Tanto quanto nos é dado a conhecer, o conceito de equivalência à Carathéodory não se encontra explorado no contexto do controlo óptimo. A sua importância é óbvia: dois problemas do controlo óptimo, equivalentes no sentido de Carathéodory, admitem as mesmas leis de conservação (cf. Observação 33). Podemos no entanto constatar que dois problemas equivalentes (no sentido do Capítulo 2) podem não o ser no sentido de Carathéodory. Não obstante, provamos neste capítulo que os problemas equivalentes são semi-equivalentes no sentido de Carathéodory: somos capazes de, a partir de uma extremal de Pontryagin para um dos problemas, construir, sob certas condições, uma extremal de Pontryagin para o outro.

4.2 O problema (P) e o seu transformado à Gamkrelidze

Na Secção 2.2 estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pares admissíveis estado-controlo dos problemas (P) e (2.1). O conjunto de extremais de Pontryagin do problema (2.1), esse, é mais rico do que o de (P). No entanto existe, como demonstramos já de seguida, uma certa relação entre as extremais dos dois problemas.

Denotamos por H o Hamiltoniano associado ao problema (P) e por $\mathcal{H}$ o Hamiltoniano associado a (2.1):

$$H(t, x, u, \psi_0, \psi) = \psi_0 L(t, x, u) + \psi \cdot \varphi(t, x, u),$$
$$\mathcal{H}(t, z, v, p_0, p_t, p_z) = [p_0 L(t, z, v) + p_t + p_z \cdot \varphi(t, z, v)] \Upsilon(t, z, v).$$

Uma vez que $\mathcal{H}$ não depende de τ, sabemos pelo Capítulo 3 que $\mathcal{H} \equiv const$ ao longo de uma extremal. Vamos mostrar que as extremais do problema (P) estão relacionadas com aquelas extremais do problema (2.1) para as quais esta constante é nula.

Teorema 42 *Seja* $(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau))$, $\tau \in [\tau_a, T]$, *uma extremal de Pontryagin do problema* (2.1) *com*

$$\mathcal{H}(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)) = 0. \tag{4.1}$$

Então

$$(x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)) = (z(\tau(t)), v(\tau(t)), p_0, p_z(\tau(t))), \quad t \in [a, b],$$

onde $\tau(\cdot)$ *é a função inversa de* $t(\cdot)$, *é uma extremal de Pontryagin de* (P).

Demonstração. Pelo Lema 8, $(x(t), u(t)) = (z(\tau(t)), v(\tau(t)))$, $t \in [a, b]$, é um par admissível para o problema (P). Permanece por estabelecer a condição de máximo e o sistema adjunto para $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$. As conclusões pretendidas são consequência da relação

$$\mathcal{H}(t, z, v, p_0, p_t, p_z) = [H(t, z, v, p_0, p_z) + p_t] \Upsilon(t, z, v) \tag{4.2}$$

entre os Hamiltonianos dos dois problemas. Por hipótese,

$$\mathcal{H}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right) = \sup_{v\in\Omega}\left\{\mathcal{H}\left(t(\tau), z(\tau), v, p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right)\right\} = 0\,, \tag{4.3}$$

q.t.p. $\tau \in [\tau_a, T]$. Da relação (4.2), e uma vez que $\Upsilon\left(t, z, v\right) > 0$ para todo o terno (t, z, v), a condição (4.3) implica que

$$H\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_z(\tau)\right) = \sup_{v\in\Omega}\left\{H\left(t(\tau), z(\tau), v, p_0, p_z(\tau)\right)\right\}\,,$$

q.t.p. $\tau \in [\tau_a, T]$. Colocando $\tau = \tau(t)$ nesta última relação, obtemos a condição de máximo para $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$:

$$H\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right) = \sup_{u\in\Omega}\left\{H\left(t, x(t), u, \psi_0, \psi(t)\right)\right\}\,.$$

Da igualdade (4.2) resulta que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\left(t, z, v, p_0, p_t, p_z\right) = \frac{\partial H}{\partial x}\left(t, z, v, p_0, p_z\right)\Upsilon(t, z, v) + \left[H\left(t, z, v, p_0, p_z\right) + p_t\right]\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(t, z, v)\,. \tag{4.4}$$

Como (4.3) implica que $H\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_z(\tau)\right) + p_t(\tau) = 0$, do sistema adjunto para $(t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), p_0, p_t(\cdot), p_z(\cdot))$ vem que

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}p_z(\tau)}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_z(\tau)\right)\Upsilon\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right)\,. \end{aligned}$$

Pela mudança de variável $\tau = \tau(t)$ obtemos

$$-\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial x}\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right)\,,$$

isto é, que $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ satisfaz o sistema adjunto pretendido. O Teorema 42 fica demonstrado. ■

Teorema 43 *Seja* $(x(t), u(t), \psi_0, \psi(t))$, $t \in [a, b]$, *uma extremal de Pontryagin do problema* (P). *Então, com* $t(\cdot)$ *como no Lema 9,*

$$\begin{aligned} &(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)) \\ &\quad = \left(t(\tau), x(t(\tau)), u(t(\tau)), \psi_0, -H\left(t(\tau), x(t(\tau)), u(t(\tau)), \psi_0, \psi(t(\tau))\right), \psi(t(\tau))\right)\,, \end{aligned}$$

$\tau \in [\tau_a, T]$, *é uma extremal de Pontryagin de* (2.1) *que satisfaz a igualdade* (4.1).

Demonstração. Pelo Lema 9, $(t(\tau), z(\tau), v(\tau))$, $\tau \in [\tau_a, T]$, é um trio admissível para o problema (2.1). Em primeiro lugar estabelecemos a condição de máximo. Por hipótese, a condição de máximo para a extremal $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ pode ser escrita na forma

$$H\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right) + p_t\left(\tau(t)\right) = \sup_{u\in\Omega}\left\{H\left(t, x(t), u, \psi_0, \psi(t)\right) + p_t\left(\tau(t)\right)\right\} = 0\,, \tag{4.5}$$

q.t.p. $t \in [a, b]$. Multiplicando (4.5) por $\Upsilon\left(t, x(t), u(t)\right)$ e tendo em conta o facto de que Υ é estritamente positivo, obtemos que

$$\begin{aligned}&\left[H\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right) + p_t\left(\tau(t)\right)\right]\Upsilon\left(t, x(t), u(t)\right)\\ &\qquad = \sup_{u\in\Omega}\left\{\left[H\left(t, x(t), u, \psi_0, \psi(t)\right) + p_t\left(\tau(t)\right)\right]\Upsilon\left(t, x(t), u\right)\right\} = 0\,,\end{aligned} \tag{4.6}$$

quase sempre em $[a, b]$. Fazendo $t = t(\tau)$ e tendo em mente (4.2), obtemos a condição de máximo para $(t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), p_0, p_t(\cdot), p_z(\cdot))$ com $\mathcal{H}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right) = 0$.

Satisfeito o sistema adjunto para $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$, podemos escrever que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p_z(\tau) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\psi\left(t(\tau)\right)\right) = \frac{\mathrm{d}\psi\left(t(\tau)\right)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\\ &= -\frac{\partial H}{\partial x}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_z(\tau)\right)\Upsilon\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau)\right)\,.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Como por hipótese $H\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_z(\tau)\right) + p_t(\tau) = 0$, segue-se de (4.7) e (4.4) que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p_z(\tau) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right)\,.$$

Para provar a validade do sistema adjunto para $(t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), p_0, p_t(\cdot), p_z(\cdot))$ resta-nos mostrar que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p_t(\tau) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right)\,,$$

ou seja, dada a definição de $p_t(\tau)$, que

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_z(\tau)\right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right)\,. \tag{4.8}$$

Da igualdade (4.2) sabemos que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\left(t, z, v, p_0, p_t, p_z\right) = \frac{\partial H}{\partial t}\left(t, z, v, p_0, p_z\right)\Upsilon(t, z, v) + \left[H\left(t, z, v, p_0, p_z\right) + p_t\right]\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(t, z, v)$$

e, por conseguinte,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right) = \frac{\partial H}{\partial t}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), p_0, p_z(\tau)\right) \Upsilon(t(\tau), z(\tau), v(\tau)) \,. \tag{4.9}$$

Tendo em mente a propriedade (3.1) do Capítulo 3 e que $\Upsilon(t(\tau), z(\tau), v(\tau)) = \frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$, (4.8) é uma consequência imediata de (4.9). ■

4.3 O problema (P) e a sua reparametrização (P_τ)

Começamos por explicitar a definição de extremal de Pontryagin para o problema (P_τ).

Definição 44 *Seja $(t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot))$ um quaterno admissível de (P_τ). Dizemos que*

$$\left(t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot), p_0, p_t(\cdot), p_z(\cdot)\right) \,,$$

$p_0 \in \mathbb{R}_0^-$, $p_t(\cdot) \in W_{1,\infty}([a,b];\mathbb{R})$ *e* $p_z(\cdot) \in W_{1,1}([a,b];\mathbb{R}^n)$, *é uma* extremal *de* (P_τ) *se as seguintes condições foram satisfeitas em quase todos os* $\tau \in [\tau_a, \tau_b]$*:*

o sistema adjunto

$$\begin{cases} p_t'(\tau) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), w(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right) \,, \\ p_z'(\tau) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), w(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right) \,; \end{cases} \tag{4.10}$$

a condição de máximo

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), w(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right) \\ &\qquad\qquad = \sup_{\substack{v>0 \\ w\in\Omega}} \mathcal{H}\left(t(\tau), z(\tau), v, w, p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right) \,; \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde o Hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H}\left(t, z, v, w, p_0, p_t, p_z\right) = \left(p_0\, L\left(t, z, w\right) + p_t + p_z \cdot \varphi\left(t, z, w\right)\right) v \,.$$

Observação 45 *As funções H e $\mathcal{H}$, respectivamente os Hamiltonianos associados aos problemas* (P) *e* (P_τ)*, estão relacionados pela seguinte igualdade:*

$$\mathcal{H}\left(t,\, z,\, v,\, w,\, p_0,\, p_t,\, p_z\right) = \left(H\left(t,\, z,\, w,\, p_0,\, p_z\right) + p_t\right) v \,. \tag{4.12}$$

Dela somos levados a concluir que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} v \,, \tag{4.13}$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x} v \,. \tag{4.14}$$

O princípio do máximo de Pontryagin fornece condições, como aquelas mencionadas na introdução da secção 6.2.3, sob as quais a cada minimizante do problema corresponde uma extremal com multiplicadores Hamiltonianos não nulos em simultâneo ($(p_0, p) \neq 0$ na Definição 44). É previsível que o conjunto de extremais do problema (P_τ) seja mais rico do que o conjunto de extremais do problema (P). Existe, contudo, uma relação entre as extremais de Pontryagin dos dois problemas. Os seguintes dois teoremas estabelecem essa relação. O Teorema 46 mostra como construir uma extremal para o problema (P) conhecida uma extremal de (P_τ).

Teorema 46 *Seja* $(t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot), p_0, p_t(\cdot), p_z(\cdot))$ *uma extremal de* (P_τ). *Então*

$$(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot)) = (z\,(\tau(\cdot))\,, w\,(\tau(\cdot))\,, p_0, p_z\,(\tau(\cdot)))$$

é uma extremal de (P), *com* $\tau(\cdot)$ *a função inversa de* $t(\cdot)$.

Demonstração. Do Lema 11 sabemos que o par $(x(\cdot), u(\cdot))$ é admissível para (P). Cálculos directos mostram que

$$\dot{\psi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_z(\tau) = \frac{\mathrm{d}p_z(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \frac{1}{v} \,.$$

De (4.14) o sistema adjunto pretendido é obtido: $\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}$. A condição de máximo (4.11) implica que

$$\mathcal{H}\,(t(\tau),\, z(\tau),\, v(\tau),\, w(\tau),\, p_0,\, p_t(\tau),\, p_z(\tau)) = \sup_{w \in \Omega} \mathcal{H}\,(t(\tau),\, z(\tau),\, v(\tau),\, w,\, p_0,\, p_t(\tau),\, p_z(\tau))$$

para quase todos os $\tau \in [a, b]$. Dada a relação (4.12) podemos escrever que

$$H\,(t(\tau),\, z(\tau),\, w(\tau),\, p_0,\, p_z(\tau)) = \sup_{w \in \Omega} H\,(t(\tau),\, z(\tau),\, w,\, p_0,\, p_z(\tau)) \,.$$

Colocando $\tau = \tau(t)$ obtemos a condição de máximo (3.4). ■

O próximo teorema mostra que a cada extremal do problema (P) correspondem extremais do problema (P_τ) com valor nulo para o Hamiltoniano maximizado $\mathcal{H}$.

Teorema 47 *Seja* $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ *uma extremal de Pontryagin de* (P). *Então,*

$$(t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot), p_0, p_t(\cdot), p_z(\cdot))$$

é uma extremal de Pontryagin de (P_τ) *com*

$$v(\cdot) \in L_\infty\left([\tau_a,\, \tau_b];\, \mathbb{R}^+\right)\,,\ \int_{\tau_a}^{\tau_b} v(\theta)\, d\theta = b - a\,,$$
$$t(\tau) = a + \int_{\tau_a}^{\tau} v(\theta)\, d\theta\,,$$
$$z(\tau) = x\left(t(\tau)\right)\,, w(\tau) = u\left(t(\tau)\right)\,,$$
$$p_0 = \psi_0\,, p_z(\tau) = \psi(t(\tau))\,,$$
$$p_t(\tau) = -H\left(t(\tau), x(t(\tau)), u(t(\tau)), \psi_0, \psi(t(\tau))\right)\,,$$

(H é definido por intermédio de (3.5)*) satisfazendo* $\mathcal{H}\left(t(\tau), z(\tau), v(\tau), w(\tau), p_0, p_t(\tau), p_z(\tau)\right) \equiv 0$.

Demonstração. Pelo Lema 12 sabemos que um tal $(t(\cdot), z(\cdot), v(\cdot), w(\cdot))$ é admissível para (P_τ). A condição de máximo (4.11) é trivialmente satisfeita uma vez que estamos no caso singular: de (4.12) o Hamiltoniano $\mathcal{H}$ anula-se para

$$p_t = -H\left(t, z, w, p_0, p_z\right)\,.$$

Permanece por demonstrar o sistema adjunto (4.10). Uma vez que $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}$ (cf. Teorema 25) a derivada de $p_t(\tau)$ em relação a τ é dada por

$$\frac{\mathrm{d}p_t}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial H}{\partial t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial H}{\partial t}\, v\,.$$

Da relação (4.12) $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} v$ (igualdade (4.13)) e a primeira das igualdades (4.10) está provada:

$$\frac{\mathrm{d}p_t}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\,.$$

De modo similar, de (4.12) sabemos que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x} v$ (igualdade (4.14)) e, em razão de $p_z(\tau) = \psi\left(t(\tau)\right)$, por (3.6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$ e, consequentemente,

$$\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x}\, v = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\,.$$

A demonstração do Teorema 47 está completa. ■

Os Teoremas 46 e 47 estabelecem uma correspondência entre as extremais anormais dos problemas (P) e (P_τ).

Corolário 48 *Se não existirem extremais anormais para o problema* (P)*, então também não existem extremais anormais para o problema* (P_τ)*. Se não existem extremais anormais para* (P_τ) *então não há, igualmente, extremais anormais para* (P)*.*

Proposição 49 *Se* $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ *é um minimizante para o problema* (P) *e* $\tilde{u}(\cdot)$ *não é um controlo extremal anormal (cf. Observação 20), então o controlo minimizante* $\tilde{v} \equiv \frac{b-a}{\tau_b - \tau_a}$ *da Proposição 16 não é, também, um controlo extremal anormal.*

Em §6.2.3 mostraremos que no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^r$, as condições de regularidade Lipschitziana, garantindo que todos os controlos minimizantes preditos pelo teorema da existência de Tonelli são extremais de Pontryagin, surgem das condições de aplicabilidade do princípio do máximo de Pontryagin a $(P_\tau[\tilde{w}(\cdot)])$.

4.4 Consignação

A relação de equivalência entre dois problemas do controlo óptimo, tal como foi observado por Carathéodory, no âmbito do cálculo das variações, não é suficiente. É igualmente importante saber, como se tornará claro nos próximos Capítulos 5 e 6, como as extremais dos problemas estão relacionadas. Neste capítulo estabelecemos a conexão entre as extremais de Pontryagin para as transformações consideradas no Capítulo 2.

Sob as transformações aqui estudadas, a relação entre extremais anormais é mantida. Seria interessante investigar outro tipo transformações, nomeadamente com o intuito de estabelecer resultados de regularidade Lipschitziana para o caso anormal (cf. Conclusão, pág. 117), em que as extremais anormais fossem mapeadas em extremais normais.

"It appears to me that if one wants to make progress in mathematics, one should study the masters and not the pupils."

—Niels Henrik Abel

"Write down the Yang-Mills theory [...] assign quark fields, lepton fields, and Higgs fields to suitable representations; let the symmetry be broken spontaneously. Now watch to see what the symmetry breaks down to [...] that, essentially, is all there is to it. Anyone can play. To win, one merely has to hit on the choice used by the Greatest Player of all time. The prize? Fame and glory, plus a trip to Stockholm."

—Anthony Zee

5

Quantidades preservadas ao longo das extremais

As leis de conservação, quantidades conservadas ao longo das extremais de Euler-Lagrange, são obtidas no cálculo das variações com fundamento no teorema de Noether e representam um papel proeminente em análise matemática e suas aplicações à física. Neste capítulo estabelecemos, no âmbito do controlo óptimo, a importante relação entre a invariância dos problemas do controlo óptimo sob uma família de transformações e a existência de quantidades preservadas ao longo das extremais de Pontryagin. Várias generalizações do teorema de Emmy Noether são obtidas aumentando o alcance da sua aplicação. Este facto é ilustrado por meio de inúmeros exemplos, não cobertos pelas anteriores versões do teorema de Noether encontradas na literatura. A nossa formulação do teorema de Noether em controlo óptimo está assente num método geral, por nós introduzido, que permite a obtenção de quantidades conservadas ao longo das extremais de Pontryagin para problemas invariantes num sentido mais lato do que aquele até então considerado. As novidades da nossa versão do teorema de Noether podem ser resumidas nos seguintes pontos: a possibilidade de se considerarem famílias de transformações dependentes de vários parâmetros; a possibilidade da família ρ-paramétrica de transformações poder depender também do controlo; a possibilidade do Lagrangeano ser invariante a menos da adição de um diferencial exacto; o facto do diferencial exacto não ser necessariamente linear em relação aos parâmetros; a possibilidade de se tratarem problemas do controlo óptimo quasi-invariantes e não necessariamente invariantes. Mesmo quando aplicados ao problema fundamental do cálculo das variações, os resultados obtidos neste capítulo são novos.

5.1 Intróito

Várias leis de conservação, primeiros integrais das equações diferenciais de Euler-Lagrange, são bem conhecidas da física onde desempenham um papel primordial (*vide* v.g. [13, 302, 222], [170, §5.5]). São exemplos típicos de leis de conservação a lei das áreas de Kepler, a lei de inércia formulada por Galileu, a conservação da massa ou a conservação de carga eléctrica (*vide* [22, Cap. 13]).

A lei de conservação mais famosa é o *integral de energia*, descoberto por Leonhard Euler em 1744 [96] e intuída mesmo antes de Galileu:[1] quando o Lagrangeano L corresponde a um sistema conservativo de pontos materiais, então verifica-se que

$$-L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x} \equiv \text{constante} \tag{5.1}$$

ao longo das soluções das equações de Euler-Lagrange. A conservação de energia encontra-se associada à homogeneidade do tempo (*vide* [22, p. 255]) e em 1876 Erdmann publicou uma generalização deste facto [94]: no caso autónomo, i.e. quando o Lagrangeano L é invariante no tempo t, a relação (5.1) é uma condição necessária de optimalidade, de primeira ordem, para o correspondente problema fundamental do cálculo das variações. A lei de conservação (5.1) é agora conhecida como a segunda condição de Erdmann.

O estudo sistemático de problemas invariantes do cálculo das variações, foi iniciado em 1918 por Emmy Amalie Noether, a distinta matemática alemã, que influenciada pelos trabalhos de Klein e Lie sobre as propriedades de transformação de equações diferenciais, publicou no esplêndido artigo [185, 186] um resultado fundamental, agora um resultado clássico, conhecido como *teorema de Noether*, afirmando que as leis de conservação no cálculo das variações são a manifestação de um princípio universal (*vide* v.g. [74, pp. 262–266], [246, §4.3.], ou [117, §20]):

> "A invariância de um sistema com respeito a uma família de transformações paramétricas, implica a existência de uma lei de conservação para esse sistema".

As quantidades conservadas ao longo das extremais são calculadas em termos do Lagrangeano e duma família de transformações apropriada. O resultado de Emmy Noether é tão geral e influente, e o artigo [185, 186] tão profundo e rico, que uma esmagadora maioria das "generalizações" do teorema de Noether são de facto seus casos particulares! (*Vide* [302].) O notável teorema de Emmy Noether, ao relacionar as propriedades de invariância de uma funcional integral $\int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$ do cálculo das variações, com os integrais das correspondentes

[1] A conservação de energia, ou seja, a impossibilidade de criar energia, aparece expressa, por exemplo, no postulado da impossibilidade do *perpetuum mobile* de Leonardo da Vinci.

equações diferenciais de Euler-Lagrange ou Hamiltonianas (*vide* v.g. [9, Apêndice 5]), revela--se de importância primacial e de implicações profundas em várias áreas da física moderna, tais como na mecânica clássica e quântica, nas teorias gravitacionais, eléctricas e electromagnéticas, na óptica geométrica, na teoria geral da relatividade, etc., englobando todos os teoremas sobre primeiros integrais sabidos na física. Por exemplo, a conservação da quantidade de movimento e momento angular da mecânica, correspondem, respectivamente, à invariância translacional e rotacional da *acção*, enquanto a invariância no tempo conduz à conservação de energia (à lei de conservação (5.1)). Outra aplicação importante do teorema de Noether surge no estudo do problema dos n corpos (n-body problem). Para uma discussão deste problema e interpretação dos respectivos primeiros integrais a partir da invariância sob transformações Galileanas e aplicação do teorema de Noether, remetemos o leitor para [178] e [119, pp. 190–192] ou [165, Cap. 2]. Para uma explanação da relevância do teorema de Noether na física, e para uma resenha histórica, *vide* [43]. A importância do teorema de Noether não se limita, no entanto, à matemática e à física. Ele é também um resultado muito importante em áreas como a engenharia, sistemas, controlo e suas aplicações (*vide* [245, 165, 179, 21]) e em economia (*vide* [219, 220]).[2]

A aplicação habitual das leis de conservação, já aludida em §3.4, é a de baixar a ordem das equações diferenciais (*vide* v.g. [14, 189, 130, 140, 227, 32]). Nesta direcção, as leis de conservação podem também simplificar o processo de resolução dos problemas de controlo óptimo (*vide* [292]). Elas são, contudo, uma ferramenta útil por muitas outras razões. Diversas aplicações importantes das leis de conservação, tanto na física como na matemática, podem ser encontradas na literatura. No cálculo das variações elas foram usadas na prova da regularidade Lipschitziana dos minimizantes (*vide* [69]), na construção de exemplos com o fenómeno de Lavrentiev (*vide* [129]) e na demonstração de existência de minimizantes (*vide* [62]). Em teoria do controlo, com o objectivo de se analisar a estabilidade, controlabilidade, etc. de sistemas de controlo não lineares, as leis de conservação foram usadas para a decomposição do sistema em termos de subsistemas de dimensão inferior (*vide* [125] e [202, 136]). No contexto do controlo óptimo elas ser-nos-ão úteis, como veremos no Capítulo 6, na demonstração da regularidade Lipschitziana das trajectórias minimizantes (cf. [217]).

A formulação típica do teorema de Noether no cálculo das variações, considera uma família uni-paramétrica de transformações diferenciáveis $h^s(t,x)$, $h^s : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (*vide* v.g. [10, §4.4.6.], [137]). As seguintes generalizações do teorema de E. Noether são assaz conhecidas: invariância para problemas do cálculo das variações definidos numa variedade diferenciável M (*vide* v.g. [144, 163, 13]) ou em espaços gerais de Banach (*vide* v.g. [246, §4.3.]); problemas do cálculo das variações com integrais múltiplos (*vide* v.g. [25], [170,

[2] Em Economia, tal como na Física, as leis de conservação têm normalmente interpretações directas. Um exemplo é a lei do rendimento/riqueza [221].

§5.5]); invariância com respeito a famílias de transformações paramétricas em grupos de Lie de dimensão finita ou infinita ([185, 186]); problemas variacionais (de ordem superior) em super-mecânica (*vide* [47]). Porquanto expressão de um princípio universal, são possíveis formulações do teorema de Noether em âmbitos muitos descoincidentes. Um bom exemplo disso, para sistemas discretos, tais como autómatos celulares em conjuntos finitos, pode ser encontrado em [17] ou [120].

A nossa formulação do teorema de Noether é provida no contexto do controlo óptimo. Isto significa, em particular, uma formulação Hamiltoniana em vez de Lagrangeana. Versões do teorema de Noether no contexto do controlo óptimo apareceram anteriormente nos artigos de D. S. Djukic [87], A. J. van der Schaft [290, 292] e H. J. Sussmann [232], assim como no livro de V. Jurdjevic [138, Ch. 13] (veja-se também [139]). Recentemente, uma versão do teorema de Noether para problemas do controlo óptimo surgiu nos trabalhos de G. Blankenstein e A. van der Schaft [31, 32]. A relação entre a invariância dos problemas de controlo óptimo e a existência de expressões que são constantes ao longo de uma qualquer das suas extremais, foi obtida pelos autores *supra* mencionados seguindo a abordagem clássica de Emmy Noether, baseada nas condições de transversalidade.[3]

Uma generalização do teorema de Noether, que involve transformações dependentes de $\dot{x}$, foi considerada no livro de texto de I. M. Gelfand e S. V. Fomin [116].[4] Outra generalização interessante pode ser encontrada no livro de H. Rund [209]: invariância do Lagrangeano a menos da adição de um diferencial exacto $d\Phi^s(t, x)$, com Φ linear no parâmetro s. H. Rund observa (cf. [209, Remark 2, p. 297]), contudo, que esta generalização é incompatível com a de Gelfand e Fomin. Aqui desenvolvemos uma abordagem completamente diferente ao teorema de Noether que nos vai permitir demonstrar uma formulação do teorema que envolve ambas as generalizações. Além disso, o pressuposto de dependência linear de Φ em relação ao parâmetro é eliminado. Outra vantagem da nossa abordagem é que não necessitamos de recorrer, como é costume, às condições de transversalidade. Este facto permite-nos tratar situações mais complexas de problemas onde as condições de fronteira não são conhecidas.

Usando como motivação e fonte de inspiração as argúcias do artigo original de Emmy Noether [185, 186] e a abordagem mais simples e directa de Andrzej Trautman [284], Hanno Rund [210] (veja-se também [167]) e John David Logan [165], estendemos as ideias de Gelfand e Fomin [116], obtendo uma nova versão do teorema de E. Noether para problemas do controlo óptimo h^s-invariantes, onde h^s pode depender igualmente da variável de controlo (Teorema 56). Posteriormente, usamos a reparametrização do tempo introduzida no

[3] No cálculo das variações, as condições de transversalidade são expressas pela chamada *variação geral da funcional* (*vide* v.g. [117, §13] ou [119, p. 185]).

[4] A possibilidade das transformações dependerem de $\dot{x}$ já se encontra, na verdade, prevista no artigo [185] de E. Noether. Ela foi, com excepção de [116], completamente esquecida pela literatura do cálculo das variações.

Capítulo 2, e a relação entre as extremais estabelecida no Capítulo 4, e obtemos o teorema de E. Noether numa forma mais geral (Teorema 69).

Outra vertente de inovação dos nossos resultados, que permite aumentar em muito o alcance de aplicação dos teoremas, é o alargamento do conceito de invariância para um conceito mais abrangente que permite vários parâmetros e, o que é particularmente importante, trabalhar com igualdades a menos de termos de ordem superior em relação aos parâmetros (quasi-invariância). Exemplos concretos de aplicação dos resultados originais, a situações não cobertas pelas versões prévias do teorema de Noether, em particular pelos métodos em [290, 292, 232, 138, 31, 32], são expostos em detalhe.

5.2 Contribuição original: Teorema de Noether para o controlo óptimo

Neste capítulo consideramos o problema de controlo óptimo (P) com $\mathcal{U} = L_\infty([a,b];\Omega)$. Demonstramos em §5.2.1 um caso particular e em §5.2.2 a forma mais geral do teorema de Noether para o problema de Lagrange do controlo óptimo.

5.2.1 Teorema de Noether sem transformação da variável de tempo

A noção seguinte generaliza as definições de invariância usadas em versões prévias do teorema de Noether, usando igualdades (5.2) e (5.3) a menos de termos de ordem superior nos ρ parâmetros $s_1, \cdots, s_\rho$; invariância do Lagrangeano a menos de um diferencial exacto $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^s$, não necessariamente linear em relação aos parâmetros; e transformações paramétricas h^s dependentes do tempo, estado e controlo.

Definição 50 *Seja* $h^s : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$,

$$s = (s_1, \ldots, s_\rho)\ ,\ \|s\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\rho} (s_k)^2} < \varepsilon\,,$$

uma família ρ-paramétrica de transformações C^1 que para $s = 0$ se reduz à identidade:

$$h^0(t,x,u) = x\,, \quad \forall (t,\, x,\, u) \in [a,\, b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega\,.$$

Se existe uma função $\Phi^s(t,x,u) \in C^1([a,\, b],\, \mathbb{R}^n,\, \Omega;\, \mathbb{R})$ e para todo o $s = (s_1, \ldots, s_\rho)$, $\|s\| < \varepsilon$, e $(x(\cdot),\, u(\cdot))$ admissível existir um controlo $u^s(\cdot) \in L_\infty([a,\, b];\, \Omega)$ tal que:

i)

$$\int_a^\beta L\left(t,\, h^s(t,x(t),u(t)),\, u^s(t)\right) \mathrm{d}t$$
$$= \int_a^\beta \left(L(t,\, x(t),\, u(t)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^s(t,\, x(t),\, u(t)) + \delta\left(t,x(t),u(t),s\right) \right) \mathrm{d}t \quad (5.2)$$

para todo o $\beta \in [a,\, b]$*;*

ii)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h^s(t,x(t),u(t)) + \delta\left(t,x(t),u(t),s\right) = \varphi(t,\, h^s(t,x(t),u(t)),\, u^s(t)); \quad (5.3)$$

onde $\delta\left(t,x,u,s\right)$ *denota termos que vão para zero mais rápido que* $\|s\|$ *para cada* t*,* x*,* u*, i.e.,*

$$\lim_{\|s\|\to 0} \frac{\delta\left(t,x,u,s\right)}{\|s\|} = 0\,, \quad (5.4)$$

então o problema (P) *diz-se* quasi-invariante *sob as transformações* $h^s(t,\, x,\, u)$ *a menos de* $\Phi^s(t,\, x,\, u)$*.*

Observação 51 *Assume-se que* $u^0(\cdot) = u(\cdot)$ *e que as derivadas* $\frac{\partial}{\partial s}u^s(\cdot)$ *existem e pertencem a* L_∞*. Este último pressuposto nem sempre se verifica quando o conjunto* Ω *de restrição dos controlos tem fronteira.*

Observação 52 *Resulta claro que a condição* (5.2) *é satisfeita se, e somente se,*

$$L\left(t,\, h^s(t,x(t),u(t)),\, u^s(t)\right) = L(t,\, x(t),\, u(t)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^s(t,\, x(t),\, u(t)) + \delta\left(t,x(t),u(t),s\right)\,. \quad (5.5)$$

Por razões históricas (cf. v.g. [116, 167, 137]), preferimos manter aqui os sinais de integração na Definição 50. Os resultados originais do capítulo podem, contudo, ser facilmente obtidos com a condição equivalente (5.5) *(*vide *[270, 272]).*

Observação 53 *O tipo de transformações de invariância que consideramos, são transformações que dependem de* ρ *parâmetros pequenos,* $s_1, \ldots, s_\rho$*, reais e independentes. Ainda que muitas das transformações paramétricas presentes nas aplicações formem um* grupo *(v.g. o grupo Galileano, o grupo de Lorentz, o grupo de Poincaré ou o grupo conformal), o conceito de grupo não é essencial para a formulação do teorema de Noether (*vide *v.g. [116, 148, 137]). Em [290, 292, 232, 138, 31, 32] considera-se que as transformações formam um grupo de Lie. Aqui, estes pressupostos restritivos nas transformações não são impostos.*

Observação 54 *Em [290], [232] e [138], como aliás em todos os trabalhos prévios que conhecemos, as transformações uni-paramétricas dependem apenas das variáveis de estado. Na*

Definição 50 as transformações dependem igualmente da variável independente e variáveis de controlo. Em [290, 232, 138] as transformações uni-paramétricas actuam, como na Definição 50, apenas sobre as variáveis de estado. Na Secção 5.2.2 usaremos a reparametrização do tempo para permitir que elas actuem, com grande vantagem (cf. §5.2.3), também sobre a variável de tempo t. É também possível formular um teorema de Noether sob transformações ρ-paramétricas a actuar (e depender) concomitantemente nas variáveis tempo, estado e controlo (cf. Observação 68).

O exemplo a seguir mostra um problema do controlo óptimo invariante sob uma família de transformações uni-paramétrica, no sentido da Definição 50, mas não invariante sob todas as definições prévias de invariância [290, 232, 31, 32, 266, 270, 275] usadas em ligação com o teorema de Noether. Isto fica a dever-se ao facto do integral não ser invariante mas apenas invariante a menos de um diferencial exacto e a menos de termos de ordem superior em relação ao parâmetro s (quasi-invariância); enquanto a terceira componente φ_3 do vector velocidade é também invariante apenas a menos de termos de ordem superior em relação ao parâmetro (quasi-invariância).

Exemplo 55 ($n = 3$, $r = 2$) *Consideremos o seguinte problema* (P)*:*

$$\int_a^b (u_1(t))^2 + (u_2(t))^2 \, \mathrm{d}t \longrightarrow \min \,,$$

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = u_1(t) \,, \\ \dot{x_2}(t) = u_2(t) \,, \\ \dot{x_3}(t) = \dfrac{u_2(t) \, (x_2(t))^2}{2} \,. \end{cases}$$

Temos que $L(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$, $\varphi(x_2, u_1, u_2) = \left(u_1, u_2, \frac{u_2 x_2^2}{2}\right)^T$ *e cálculos directos mostram que o problema é quasi-invariante sob*

$$h^s(t, x_1, x_2, x_3) = \left(h^s_{x_1}(t, x_1), h^s_{x_2}(t, x_2), h^s_{x_3}(t, x_2, x_3)\right) = \left(x_1 + st, x_2 + st, x_3 + \frac{1}{2} x_2^2 st\right)$$

a menos de $\Phi^s(x_1, x_2) = 2s\,(x_1 + x_2)$*:* $h^0(t, x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ *e escolhendo* $u_1^s = u_1 + s$

e $u_2^s = u_2 + s$ *(*$u_1^0 = u_1$*,* $u_2^0 = u_2$*) obtemos*

$$\begin{aligned}\int_a^\beta L\left(u_1^s(t), u_2^s(t)\right)\mathrm{d}t &= \int_a^\beta \left(u_1(t)+s\right)^2 + \left(u_2(t)+s\right)^2 \mathrm{d}t \\ &= \int_a^\beta \left[\left(u_1(t)^2 + u_2(t)^2\right) + 2s\left(u_1(t)+u_2(t)\right) + 2s^2\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_a^\beta \left[L\left(u_1(t), u_2(t)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Phi^s\left(x_1(t), x_2(t)\right)\right) + \delta(s)\right]\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

pelo que a equação (5.2) *é satisfeita com* $\delta(s) = 2s^2$*;*

$$\begin{aligned}\varphi_1\left(u_1^s(t)\right) &= u_1(t) + s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1(t)+st) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{x_1}^s\left(t, x_1(t)\right)\,, \\ \varphi_2\left(u_2^s(t)\right) &= u_2(t) + s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_2(t)+st) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{x_2}^s\left(t, x_2(t)\right)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_3\left(h_{x_2}^s\left(t, x_2(t)\right), u_2^s(t)\right) = \frac{\left(u_2(t)+s\right)\left(x_2(t)+st\right)^2}{2} \\ &= \frac{u_2(t)x_2(t)^2}{2} + \frac{1}{2}s\left(x_2(t)^2 + 2x_2(t)u_2(t)t\right) + \frac{\left(u_2(t)t^2 + 2x_2(t)t\right)s^2 + t^2s^3}{2} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_3(t) + \frac{1}{2}x_2(t)^2 st\right) + \delta\left(t, x_2(t), u_2(t), s\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{x_3}^s\left(t, x_2(t), x_3(t)\right) + \delta\left(t, x_2(t), u_2(t), s\right)\,,\end{aligned}$$

e portanto (5.3) *é também satisfeita.*

Teorema 56 *Se* (P) *é quasi-invariante sob as transformações* $h^s(t,\, x,\, u)$ *a menos de* $\Phi^s(t,\, x,\, u)$*, no sentido da Definição 50, então*

$$\psi(t)\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}\,h^s(t,\, x(t),\, u(t))\big|_{s=0} + \psi_0\frac{\partial}{\partial s_k}\,\Phi^s(t,\, x(t),\, u(t))\big|_{s=0}$$

$(k = 1, \ldots, \rho)$ *são* ρ *primeiros integrais (cf. Definição 32).*

Observação 57 *A quantidade* $\psi(t)\cdot\frac{\partial}{\partial s}\,h^s(t,\, x(t))\big|_{s=0}$ *é o clássico* momentum map*, correspondente à simetria da acção.*[5]

Observação 58 *Apesar de não existirem extremais anormais para o problema fundamental do cálculo das variações, a existência de minimizantes anormais no cálculo das variações e controlo óptimo é um fenómeno comum (*vide *[233, 8, 37]). Os nossos resultados são capazes de tratar, quer o caso normal, quer o caso anormal, enquanto os de [31, 32] não consideram*

[5] *A simetria é a família uni-paramétrica de transformações* h^s *que actua sobre as variáveis do problema.*

a possibilidade de anormalidade. O Exemplo 79, considerado em §5.2.3, admite minimizantes anormais.

Exemplo 59 *Para o problema considerado no Exemplo 55, concluímos do Teorema 56 que* $2\psi_0\left(x_1(t)+x_2(t)\right)+\psi_1(t)t+\psi_2(t)t+\frac{1}{2}\psi_3(t)\left(x_2(t)\right)^2 t$ *é constante ao longo das extremais de Pontryagin.*

Exemplo 60 *O problema* (3.16) *é invariante sob a família de transformações uni-paramétrica* $h^s(x)=\mathrm{e}^s x$ *(cf. Definição 50 com* $u^s=u$ *e* $\Phi^s\equiv 0$*). Obtemos do Teorema 56 que*

$$\psi(t)x(t)\equiv \text{constante}\,, \tag{5.6}$$

$t\in[a,b]$*, ao longo de uma qualquer extremal de Pontryagin do problema* (3.16)*.*

Exemplo 61 *Sob a condição* (3.18) *o problema* (3.17) *é invariante sob* $h_{x_1}^s=\mathrm{e}^s x_1$*,* $h_{x_2}^s=\mathrm{e}^s x_2$*, com* $u_i^s=u_i$ *e* $\Phi^s\equiv 0$*. A Proposição 41 é consequência do Teorema 56 e será mais tarde generalizada (cf. Proposição 84 e Exemplo 87). Outras conclusões são igualmente possíveis se impusermos condições diferentes aos campos de vectores* X_i *(cf. Exemplo 74).*

Exemplo 62 ($n=3$**,** $r=2$**)** *Considere-se o seguinte problema de controlo óptimo:*

$$\int_a^b \left(u_1(t)\right)^2+\left(u_2(t)\right)^2\,\mathrm{d}t\longrightarrow\min\,,$$
$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=u_1(t)\cos x_3(t)\,,\\ \dot{x}_2(t)=u_1(t)\sin x_3(t)\,,\\ \dot{x}_3(t)=u_2(t)\,.\end{cases} \tag{5.7}$$

O sistema de controlo (5.7) *serve de modelo à cinemática de um carro (cf. [205, p. 32], [237, §4]). O problema é invariante sob a família de transformações uni-paramétrica* $h^s=\left(h_{x_1}^s,h_{x_2}^s,h_{x_3}^s\right)$ *definida como se segue (repare-se que para* $s=0$ *temos* $h_{x_1}^0\left(x_1,x_2\right)=x_1$*,* $h_{x_2}^0\left(x_1,x_2\right)=x_2$ *e* $h_{x_3}^0\left(x_3\right)=x_3$*):*

$$\begin{aligned}h_{x_1}^s\left(x_1,x_2\right)&=x_1\cos s-x_2\sin s\,,\\ h_{x_2}^s\left(x_1,x_2\right)&=x_1\sin s+x_2\cos s\,,\\ h_{x_3}^s\left(x_3\right)&=x_3+s\,.\end{aligned}$$

Para isso basta fazer $\Phi^s\equiv 0$*,* $u_1^s=u_1$ *e* $u_2^s=u_2$ *na Definição 50. A condição* (5.2) *é* *trivialmente satisfeita e* (5.3) *facilmente verificada por cálculos directos:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h^s_{x_1} = \dot{x_1}\cos s - \dot{x_2}\sin s = u_1\left(\cos x_3\cos s - \sin x_3 \sin s\right) = u_1 \cos\left(x_3+s\right) = u_1^s \cos h^s_{x_3}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h^s_{x_2} = \dot{x_1}\sin s + \dot{x_2}\cos s = u_1\left(\cos x_3\sin s + \sin x_3 \cos s\right) = u_1 \sin\left(x_3+s\right) = u_1^s \sin h^s_{x_3}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h^s_{x_3} = \dot{x_3} = u_2 = u_2^s\,.$$

Como

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial h^s_{x_1}}{\partial s}\right|_{s=0} &= -x_1\sin s - x_2\cos s|_{s=0} = -x_2\,,\\ \left.\frac{\partial h^s_{x_2}}{\partial s}\right|_{s=0} &= x_1\cos s - x_2\sin s|_{s=0} = x_1\,,\\ \left.\frac{\partial h^s_{x_3}}{\partial s}\right|_{s=0} &= 1\,,\end{aligned}$$

concluímos imediatamente do Teorema 56 que se

$$\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t), u_1(t), u_2(t), \psi_0, \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)\right)\,, \quad t \in [a, b]\,,$$

for uma extremal de Pontryagin do problema, então

$$-\psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)x_1(t) + \psi_3(t) \equiv \textit{constante}\,.$$

Demonstração. (*Teorema 56.*) Dado (5.2) temos, para todo o $k \in \{1,\ldots,\rho\}$ e todo o $\beta \in [a,\, b]$, que

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_k}\int_a^\beta \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^s(t,\, x(t),\, u(t)) + \delta\left(t, x(t), u(t), s\right)\right]\mathrm{d}t\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_k}\int_a^\beta L\left(t,\, h^s(t,\, x(t),\, u(t)),\, u^s(t)\right)\mathrm{d}t\\ &=\int_a^\beta \left(\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}h^s(t,\, x(t),\, u(t)) + \frac{\partial L}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}u^s(t)\right)\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

com as derivadas parciais de L calculadas em $(t,\, h^s(t, x(t), u(t)),\, u^s(t))$. Consequentemente, para $s = (s_1, \ldots, s_\rho) = 0$,

$$0 = \int_a^\beta \left(\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}\, u^s(t)|_{s=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial s_k}\,\Phi^s|_{s=0}\right)\mathrm{d}t, \tag{5.8}$$

onde agora, e até ao fim da demonstração, todas as funções são calculadas em $(t,\, x(t),\, u(t))$. Se $(x(\cdot),\, u(\cdot),\, \psi_0,\, \psi(\cdot))$ é uma extremal de Pontryagin de (P) então, em virtude do sistema adjunto (3.6),

$$\dot{\psi}(t) = -\psi_0 \frac{\partial L}{\partial x} - \psi(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Leftrightarrow -\psi_0 \frac{\partial L}{\partial x} = \dot{\psi}(t) + \psi(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Multiplicando (5.8) por $-\psi_0$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^\beta \Bigg(\dot{\psi}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s|_{s=0} + \psi(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s|_{s=0} & \\ - \psi_0 \frac{\partial L}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, u^s(t)|_{s=0} + \psi_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial s_k}\, \Phi^s|_{s=0} \Bigg) \mathrm{d}t. & \end{aligned} \tag{5.9}$$

Pela condição de máximo (3.4) sabemos que a expressão

$$M_t(s) = \psi_0\, L(t,\, x(t),\, u^s(t)) + \psi(t) \cdot \varphi(t,\, x(t),\, u^s(t))$$

atinge o seu máximo para $s = 0$. Por conseguinte, para cada $k \in \{1, \ldots, \rho\}$, $\frac{\partial M_t(s)}{\partial s_k}$ toma o valor zero para $s = 0$, isto é,

$$\psi_0 \frac{\partial L}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, u^s(t)|_{s=0} + \psi(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, u^s(t)|_{s=0} = 0. \tag{5.10}$$

De (5.9) e (5.10) concluímos que

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^\beta \Bigg(\dot{\psi}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s|_{s=0} + \psi(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s|_{s=0} & \\ + \psi(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, u^s(t)|_{s=0} + \psi_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial s_k}\, \Phi^s|_{s=0} \Bigg) \mathrm{d}t. & \end{aligned} \tag{5.11}$$

Por outro lado, diferenciando (5.3) em relação a s_k, obtemos em $s = 0$ que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s|_{s=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s|_{s=0} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, u^s(t)|_{s=0}$$

e portanto podemos escrever (5.11) na forma

$$\begin{aligned} \int_a^\beta \Bigg(\dot{\psi}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s|_{s=0} + \psi(t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s|_{s=0} + \psi_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial s_k}\, \Phi^s|_{s=0} \Bigg) \mathrm{d}t & \\ = \int_a^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Bigg(\psi(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s|_{s=0} + \psi_0 \frac{\partial}{\partial s_k}\, \Phi^s|_{s=0} \Bigg) \mathrm{d}t = 0. & \end{aligned}$$

Isto significa que

$$\begin{aligned}\psi(\beta)\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s\left(\beta,\, x(\beta),\, u(\beta)\right)\big|_{s=0}+\psi_0\frac{\partial}{\partial s_k}\,\Phi^s\left(\beta,\, x(\beta),\, u(\beta)\right)\big|_{s=0}\\ =\psi(a)\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s\left(a,\, x(a),\, u(a)\right)\big|_{s=0}+\psi_0\frac{\partial}{\partial s_k}\,\Phi^s\left(a,\, x(a),\, u(a)\right)\big|_{s=0}\end{aligned}$$

$\forall\, \beta\in[a,b]$, i.e.,

$$\psi(t)\cdot\frac{\partial}{\partial s_k}\, h^s(t,x(t),u(t))\big|_{s=0}+\psi_0\frac{\partial}{\partial s_k}\,\Phi^s\left(t,x(t),u(t)\right)\big|_{s=0}$$

é constante em $[a,b]$. ■

Observação 63 *A partir de* (5.5) *temos que*

$$\delta\left(t,x(t),u(t),s\right)=L\left(t,h^s\left(t,x(t),u(t)\right),u^s(t)\right)-L\left(t,x(t),u(t)\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^s\left(t,x(t),u(t)\right)\,,$$

enquanto de (5.3) *obtemos*

$$\delta\left(t,x(t),u(t),s\right)=\varphi\left(t,h^s\left(t,x(t),u(t)\right),u^s(t)\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h^s\left(t,x(t),u(t)\right)\,.$$

Destas igualdades, fórmulas explicitas para as derivadas de cada $\delta\left(t,x,u,s_1,\ldots,s_\rho\right)$ *em relação a* s_k *(*$k=1,\ldots,\rho$*) podem ser obtidas. As derivadas anulam-se para* $s=(s_1,\ldots,s_\rho)=0$ *devido a* (5.4)*.*

Observação 64 *A demonstração original de Emmy Noether [185, 186] é baseada em resultados profundos e conceptualmente difíceis do cálculo das variações. Uma abordagem preferível, que evita, por completo, o uso das condições de transversalidade, foi proposta por Hanno Rund em 1973 [210]. O método de Rund permite deduzir o teorema de Noether, praticamente sem esforço, directamente da noção de invariância e por recurso a técnicas elementares (veja-se também o livro de Lovelock e Rund [167]). Pode dizer-se que a demonstração do Teorema 56 generaliza a abordagem de Rund do cálculo das variações ao controlo óptimo.*

Observação 65 *Tendo em conta que todos os conceitos e ferramentas sob consideração, incluindo o princípio do máximo de Pontryagin, são de natureza local em relação ao estado, o facto de nos restringirmos a variáveis de estado em espaços Euclideanos* $\mathbb{R}^n$ *não conduz a qualquer perda de generalidade. Podemos afirmar que os resultados obtidos no presente capítulo são gerais para todos os problemas de controlo óptimo satisfazendo algum princípio do máximo. Embora no presente capítulo usemos o princípio do máximo (Teorema 17) como foi apresentado em primeira mão, no livro [199], por L. S. Pontryagin e seus colaboradores,* *para problemas de controlo óptimo em* $\mathbb{R}^n$*, esta versão não esgota, de maneira nenhuma, todo o poder do princípio do máximo. A preocupação de formulá-lo e demonstrá-lo nos mais diversos contextos é um assunto muito em progresso (* vide *v.g. [57, 236]). Por exemplo, é possível obter uma formulação do princípio do máximo de Pontryagin independente de coordenadas, na terminologia da geometria simpléctica (* vide *v.g. [234], [6, Cap. 11]), e formular os Teoremas 56 e 69 em variedades (cf. [198]).*

5.2.2 Teorema de Noether com transformação da variável de tempo

Vamos agora generalizar a noção de invariância dada na Definição 50, admitindo a possibilidade de uma transformação ρ-paramétrica da variável independente t.

Definição 66 *Seja* $h^s(t,x,u) = (h_t^s(t,x,u), h_x^s(t,x,u))$*,* $h_t^s : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\Omega \to \mathbb{R}$ *e* $h_x^s : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ *(*$\|s\| < \varepsilon$*), uma família* ρ*-paramétrica de transformações* C^1 *e* $h^0(t,x,u) = (t,x)$ *para todo o* $(t,x,u)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\Omega$*. Se existe uma função* $\Phi^s(t,x,u) \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n,\Omega;\mathbb{R})$ *e para todo o* $s = (s_1,\ldots,s_\rho)$ *e para todo o par admissível* $(x(\cdot),u(\cdot))$ *existir um controlo* $u^s(\cdot)\in L_\infty([a,b];\Omega)$ *tal que:*[6]

i)

$$\int_{h_t^s(a,x(a),u(a))}^{h_t^s(\beta,x(\beta),u(\beta))} L\left(t^s, h_x^s(t^s,x(t^s),u(t^s)), u^s(t^s)\right)\mathrm{d}t^s = \int_a^\beta \left(L(t,x(t),u(t)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^s(t,x(t),u(t)) + \delta\left(t,x(t),u(t),s\right)\right)\mathrm{d}t, \quad (5.12)$$

para todo o $\beta\in[a,b]$*;*

ii)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s}h_x^s(t^s,x(t^s),u(t^s)) + \delta\left(t,x(t),u(t),s\right) = \varphi(t^s,\, h_x^s(t^s,x(t^s),u(t^s)),\, u^s(t^s)), \quad (5.13)$$

para $t^s = h_t^s(t,x(t),u(t))$*;*

então o problema (P) *diz-se* quasi-invariante *sob as transformações* $(h_t^s(t,x,u), h_x^s(t,x,u))$ *a menos de* $\Phi^s(t,x,u)$*.*

Observação 67 *Resulta claro, transformando o integral no primeiro membro de* (5.12) *para*

[6] *As funções* δ *têm o mesmo significado que na Definição 50.*

o intervalo $[a,\beta]$, que a condição (5.12) *é equivalente a*

$$L\left(t^s, h_x^s\left(t^s, x(t^s), u(t^s)\right), u^s(t^s)\right) \frac{\mathrm{d}t^s}{\mathrm{d}t} \\ = L\left(t, x(t), u(t)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^s\left(t, x(t), u(t)\right) + \delta\left(t, x(t), u(t), s\right), \quad (5.14)$$

com $t^s = h_t^s\left(t, x(t), u(t)\right)$. No caso particular da Definição 50 temos $h_t^s = t$ e a condição (5.5) *é obtida.*

Observação 68 *Uma noção de invariância para problemas do controlo óptimo, conceptualmente não tão geral como a da Definição 66 mas com a vantagem de ser um pouco mais construtiva, usando uma família de transformações que, explicitamente, modifica todas as variáveis (tempo, estados e* controlos*), foi elaborada e desenvolvida pelo autor deste trabalho em [270, 272]. Aqui formulamos o teorema de Noether (Teorema 69) na sua forma mais ecuménica. A factor "pouco construtivo" será aqui abordado numa secção à parte (cf. §5.2.4).*

Obtemos de seguida uma versão mais geral do teorema de Noether para problemas de controlo óptimo, que permite construir quantidades conservadas ao longo das extremais de Pontryagin do problema. O Teorema 69 fornece ρ leis de conservação quando o problema (P) é quasi-invariante a menos de Φ^s sob uma família de transformações contendo ρ parâmetros.

Teorema 69 *Se* (P) *é quasi-invariante sob as transformações $(h_t^s(t,\, x,\, u),\, h_x^s(t,\, x,\, u))$ a menos de $\Phi^s(t,\, x,\, u)$, no sentido da Definição 66, então*

$$\psi(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, h_x^s(t,\, x(t),\, u(t))|_{s=0} + \psi_0 \frac{\partial}{\partial s_k}\, \Phi^s(t,\, x(t),\, u(t))|_{s=0} \\ - H\left(t,\, x(t),\, u(t),\, \psi_0,\, \psi(t)\right) \frac{\partial}{\partial s_k}\, h_t^s(t,\, x(t),\, u(t))|_{s=0}$$

é um primeiro integral $\forall\, k = 1, \ldots, \rho$.

Observação 70 *Na formulação do Teorema 69, H é o Hamiltoniano* (3.5) *associado ao problema* (P)*.*

Observação 71 *Para o problema fundamental do cálculo das variações, se fizermos $\rho = 1$, $\Phi^s \equiv 0$ e $\delta\left(t, x, u, s\right) \equiv 0$ em* (5.12) *e* (5.13)*, o Teorema 69 coincide com o teorema de Noether em [117, §20].*[7] *O par*

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\, h_t^s(t,\, x,\, u)|_{s=0}\,, \frac{\partial}{\partial s}\, h_x^s(t,\, x,\, u)|_{s=0}\right)$$

[7] *A nossa demonstração é, todavia, muito mais elegante do que aquela encontrada em [117, §20], que é assente na chamada "fórmula geral para a* variação *de uma funcional" (cf. nota de rodapé na pág. 62).*

é o campo de vectores tangente *a* $\{h^s\}$. *O primeiro integral construído no teorema de Noether é o valor da 1-forma diferencial de Poincaré-Cartan* $w = \psi\,\mathrm{d}x - H\,\mathrm{d}t$ *sobre o campo de vectores tangente. Para uma resenha destas questões e o papel dos resultados de E. Noether na mecânica veja-se [302].*

Observação 72 *O Teorema 69, como as formulações clássicas do teorema de Noether para o cálculo das variações (*vide *v.g. [10, 13, 117, 137, 209]) e as versões para controlo óptimo (*vide *v.g. [138, 232]), é expresso como uma implicação: "invariância implica a existência de uma lei de conservação". É no entanto possível a formulação de uma condição necessária e suficiente (cf. [265, Theorem 2]). Esta equivalência, presente no trabalho original de Noether [185, 186], mas praticamente ausente na muita literatura sobre o assunto (como excepção veja-se [144]), pode ser interpretada como um caso particular do Corolário 35.*

Observação 73 *Os problemas autónomos são invariantes sob* $h_t^s = t + s$ *e* $h_x^s = x$ *(os problemas autónomos são invariantes no tempo). Resulta do Teorema 69 que o correspondente Hamiltoniano H é constante ao longo das extremais de Pontryagin (cf. igualdade* (3.7)*). Para o problema invariante no tempo* (3.16)*, este facto, juntamente com a lei de conservação* (5.6)*, dá uma explicação alternativa para* (3.15) *ser constante ao longo das extremais do problema.*

Exemplo 74 *Sob as hipóteses* $X_i(\lambda x_1) = \lambda^\xi X_i(x_1)$, $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, *o problema* (3.17) *é invariante* ($\delta = 0$) *sob*

$$t^s = h_t^s(t) = \mathrm{e}^{-2s} t\,,\; h_{x_1}^s(x_1(t^s)) = \mathrm{e}^{\frac{3}{\xi-1}s} x_1(t)\,,\; h_{x_2}^s(x_2(t^s)) = \mathrm{e}^{\left(\frac{3\xi}{\xi-1}-1\right)s} x_2(t)\,,$$

com $u_i^s(t^s) = \mathrm{e}^s u_i(t)$ *e* $\Phi^s \equiv 0$*:*

$$L\left(u_1^s(t^s), \ldots, u_n^s(t^s)\right) \frac{\mathrm{d}t^s}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{2s} \left(\sum_{i=1}^n (u_i(t))^2\right) \mathrm{e}^{-2s} = L\left(u_1(t), \ldots, u_n(t)\right)\,,$$

pelo que (5.14) *é satisfeita;*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s} h_{x_1}^s(x_1(t^s)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{\xi-1}s} x_1(t)\right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^s} = \mathrm{e}^{\frac{3}{\xi-1}s} x_2(t) \mathrm{e}^{2s} = h_{x_2}^s(x_2(t^s))\,,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s} h_{x_2}^s(x_2(t^s)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\left(\frac{3\xi}{\xi-1}-1\right)s} x_2(t)\right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^s} = \mathrm{e}^{\left(\frac{3\xi}{\xi-1}+1\right)s} \sum_{i=1}^n X_i(x_1(t))\, u_i(t)\\
&= \sum_{i=1}^n \left(\mathrm{e}^{\frac{3s}{\xi-1}}\right)^\xi X_i(x_1(t))\,(\mathrm{e}^s u_i(t)) = \sum_{i=1}^n X_i\left(h_{x_1}^s(x_1(t^s))\right) u_i^s(t^s)\,,
\end{aligned}$$

e a condição (5.13) *é igualmente verificada. Concluímos do Teorema 69 que*

$$\psi_1(t)\frac{3}{\xi-1}x_1(t)+\psi_2(t)\left(\frac{3\xi}{\xi-1}-1\right)x_2(t)+2Ht$$

é constante ao longo das extremais do problema (3.17).[8]

Demonstração. (Teorema 69.) A demonstração assenta na redução ao Teorema 56, através da reparametrização do tempo introduzida em §2.3. A conclusão pretendida é obtida a partir do Teorema 47 e da Proposição 75.

Proposição 75 *Se* (P) *é quasi-invariante sob* $(h_t^s(t,x,u),\, h_x^s(t,x,u))$ *a menos de* $\Phi^s(t,x,u)$, *no sentido da Definição 66, então* (P_τ) *é quasi-invariante sob* $h^s\,(t,\, z,\, w) = (h_t^s(t,\, z,\, w),$ $h_x^s(t,\, z,\, w))$ *a menos de* $\Phi^s(t,\, z,\, w)$ *no sentido da Definição 50.*

Demonstração. A Proposição é uma consequência da Definição 66. Basta efectuar a substituição de variável $t^s = h_t^s(t(\tau),\, x(t(\tau)),\, u(t(\tau)))$ no primeiro membro da igualdade (5.12); a mudança $t = t(\tau)$ no segundo membro de (5.12); e a mudança de variável $t = t(\tau)$ em (5.13). ■

Seja $(x(\cdot),\, u(\cdot),\, \psi_0,\, \psi(\cdot))$ uma extremal de Pontryagin de (P). Sob as hipóteses do Teorema 69, o Teorema 47, a Proposição 75 e o Teorema 56 implicam que para $k \in \{1, \ldots, \rho\}$

$$\begin{aligned} p_t(\tau)\, \frac{\partial}{\partial s_k}\, h_t^s\,(t(\tau),\, x(t(\tau)),\, u(t(\tau)))|_{s=0} \\ + p_z(\tau)\cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, h_x^s\,(t(\tau),\, x(t(\tau)),\, u(t(\tau)))|_{s=0} \\ + p_0\, \frac{\partial}{\partial s_k}\, \Phi^s\,(t(\tau),\, x(t(\tau)),\, u(t(\tau)))|_{s=0} \end{aligned}$$

é constante para $\tau \in [\tau_a,\, \tau_b]$, ou seja,

$$\begin{aligned} - H\,(t,\, x(t),\, u(t),\, \psi_0,\, \psi(t))\, \frac{\partial}{\partial s_k}\, h_t^s(t,\, x(t),\, u(t))|_{s=0} \\ + \psi(t)\cdot \frac{\partial}{\partial s_k}\, h_x^s(t,x(t),u(t))|_{s=0} + \psi_0\, \frac{\partial}{\partial s_k}\, \Phi^s(t,x(t),u(t))|_{s=0} \end{aligned}$$

é constante em $[a,\, b]$. ■

[8] *Tal como o Exemplo 61, também esta situação irá ser incluída na Proposição 84, pág. 83. Para isso basta escolher* $\alpha = -2$, $\beta_1 = \frac{3}{\xi-1}$, $\beta_2 = \frac{3\xi}{\xi-1} - 1$ *e* $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 1$ *na Proposição 84* ($\beta_1 - \alpha = \beta_2$, $\beta_2 - \alpha = \xi\beta_1 + 1$).

Observação 76 *Para*

$$\psi(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s_k} h_x^s(t,\, x(t),\, u(t))\big|_{s=0} - H\left(t,\, x(t),\, u(t),\, 0,\, \psi(t)\right) \frac{\partial}{\partial s_k} h_t^s(t,\, x(t),\, u(t))\big|_{s=0} \,,$$

$k = 1, \ldots, \rho$, ser um primeiro integral anormal (cf. Definição 34) sob $h^s(t,x,u) = (h_t^s(t,x,u), h_x^s(t,x,u))$, é suficiente que a condição (5.13) *da Definição 66 seja satisfeita.*

5.2.3 Exemplos ilustrativos

Não é problemático encontrar situações para as quais o Teorema 69 proporciona leis de conservação novas, não facilmente obtidas dos resultados previamente conhecidos. Seguem-se alguns exemplos.

Exemplo 77 **($n = r = 1$)** *Para o problema*

$$\begin{aligned} I\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] &= \int_a^b \mathrm{e}^{tx(t)} u(t)\, \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,, \\ \dot{x}(t) &= tx(t)u(t)^2\,, \quad u \in \Omega\,, \end{aligned}$$

constatamos que

$$\psi_0 t\mathrm{e}^{tx(t)} u(t) + \psi(t)x(t)\left((tu(t))^2 + 1\right) \tag{5.15}$$

é constante ao longo de qualquer extremal de Pontryagin $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$. Para isso fazemos $t^s = h_t^s(t) = \mathrm{e}^{-s}t$, $h_x^s\left(x(t^s)\right) = \mathrm{e}^s x(t)$, $u^s(t^s) = \mathrm{e}^s u(t)$, $\Phi^s \equiv 0$ na Definição 66:

$$\begin{aligned} &\int_{h_t^s(a)}^{h_t^s(\beta)} L\left(t^s, h_x^s\left(x(t^s)\right), u^s(t^s)\right) \mathrm{d}t^s \\ &\quad \overset{t^s = h_t^s(t)}{=} \int_a^\beta L\left(\mathrm{e}^{-s}t, \mathrm{e}^s x(t), \mathrm{e}^s u(t)\right) \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-s}t\right)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int_a^\beta \mathrm{e}^{tx(t)} u(t) \mathrm{d}t \\ &\quad = \int_a^\beta L\left(t, x(t), u(t)\right) \mathrm{d}t\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\varphi\left(t^s, h_x^s\left(x(t^s)\right), u^s(t^s)\right) \\ &\quad = t^s h_x^s\left(x(t^s)\right)\left(u^s(t^s)\right)^2 = tx(t)\mathrm{e}^{2s} u(t)^2 = \left(\mathrm{e}^s \dot{x}(t)\right)\mathrm{e}^s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^s x(t)\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^s} \\ &\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s} h_x^s\left(x(t^s)\right)\,. \end{aligned}$$

Concluímos então, do Teorema 69, que $\psi x + Ht$ é um primeiro integral (que coincide com (5.15)*).*

A lei de conservação $\psi_0 t e^{tx(t)} u(t) + \psi(t)x(t)\left((tu(t))^2+1\right) \equiv$ constante pode ser olhada, tal como a segunda condição de Erdmann, como uma condição necessária de optimalidade.

Uma das novidades dos resultados obtidos é considerarem-se simetrias do sistema que alteram a funcional custo a menos de um diferencial exacto. Uma vez que Φ^s pode depender do parâmetro s de uma maneira não linear, os Teoremas 56 e 69 generalizam os resultados conhecidos mesmo para o problema fundamental do cálculo das variações. O exemplo seguinte ilustra esta questão. Notamos ainda que no Exemplo 78 a transformação de estado h^s depende não apenas da variável de estado x mas também do tempo t. Esta dependência não é possível em [290, 292, 232, 138, 31, 32].

Exemplo 78 *Considere-se o seguinte problema fundamental do cálculo das variações ($n = r = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$):*

$$\int_a^b (u(t))^2 \, \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,,$$
$$\dot{x}(t) = u(t)\,.$$

Neste caso temos $L = u^2$ e $\varphi = u$. Facilmente concluímos que tal problema é invariante, no sentido da Definição 50, sob a transformação uni-paramétrica $h^s(t,x) = x + st$ ($h^0(t,x) = x$). Basta observar que para $\Phi^s(t,x) = s^2 t + 2sx$ e $u^s(t) = u(t) + s$ ($u^0(t) = u(t)$) temos:

$$\begin{aligned}\int_a^\beta L\left(u^s(t)\right) \mathrm{d}t &= \int_a^\beta (u(t)+s)^2 \, \mathrm{d}t = \int_a^\beta \left((u(t))^2 + s^2 + 2su(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_a^\beta \left(L\left(u(t)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^s\left(t, x(t)\right)\right) \mathrm{d}t\,; \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h^s\left(t,x(t)\right) &= \dot{x}(t) + s = \varphi\left(u^s(t)\right)\,.\end{aligned}$$

Do Teorema 56 resulta que $\psi(t)t + 2\psi_0 x(t)$ é constante em t ao longo das extremais. Como para o problema fundamental do cálculo das variações $\psi(t) = \frac{\partial L}{\partial u}\left(t, x(t), u(t)\right)$ e $\psi_0 = -1$, a conclusão é a de que $\dot{x}(t)t - x(t)$ é um primeiro integral das equações diferenciais de Euler-Lagrange.

O próximo exemplo é um problema importante no contexto da geometria sub-Riemanniana (*vide* [285]). Apesar do problema ser autónomo, a transformação da variável tempo é necessária para a obtenção dos primeiros integrais. Esta situação não é considerada pelos resultados em [290, 292, 232, 138, 31, 32]. Os primeiros integrais obtidos são novos.

Exemplo 79 *Considere-se o problema* ($n = 3$, $r = 2$)

$$\int_a^b (u_1(t))^2 + (u_2(t))^2 \, \mathrm{d}t \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = u_1(t)\,, \\ \dot{x_2}(t) = \dfrac{u_2(t)}{1+\alpha x_1(t)}\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,, \\ \dot{x_3}(t) = (x_2(t))^2\, u_1(t)\,. \end{cases}$$

Neste caso o Hamiltoniano é dado por

$$H(x_1, x_2, u_1, u_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = \psi_0 \left(u_1^2 + u_2^2\right) + \psi_1 u_1 + \frac{\psi_2 u_2}{1+\alpha x_1} + \psi_3 x_2^2 u_1\,,$$

e ψ_3 e H são primeiros integrais triviais (H não depende de x_3 e t e a conclusão provém directamente do sistema adjunto (3.6) *e do Teorema 25). Quando $\alpha = 0$, isto é para o problema de Martinet da geometria sub-Riemanniana no* caso plano *(flat) (*vide *[2, 36]), ψ_1 é igualmente um primeiro integral trivial do problema. Por intermédio do teorema de Noether com transformação da variável tempo, obteremos primeiros integrais novos e não triviais. Consideraremos duas situações: $\alpha = 0$ (*caso plano*) e $\alpha \neq 0$ (*caso não plano*).*

***Problema* flat.** *Para $\alpha = 0$, os pressupostos do Teorema 69 são satisfeitos com $t^s = h_t^s(t) = \mathrm{e}^{2s} t$, $h_{x_1}^s\left(x_1(t^s)\right) = \mathrm{e}^s x_1(t)$, $h_{x_2}^s\left(x_2(t^s)\right) = \mathrm{e}^s x_2(t)$, $h_{x_3}^s\left(x_3(t^s)\right) = \mathrm{e}^{3s} x_3(t)$, e $\Phi^s \equiv 0$. Com efeito, o problema é invariante sob estas transformações, no sentido da Definição 66, uma vez que para $u_1^s(t^s) = \mathrm{e}^{-s} u_1(t)$ e $u_2^s(t^s) = \mathrm{e}^{-s} u_2(t)$ obtemos:*

$$\begin{aligned}\int_{h_t^s(a)}^{h_t^s(\beta)} \left((u_1^s(t^s))^2 + (u_2^s(t^s))^2\right) \mathrm{d}t^s &= \int_a^\beta \left((u_1(t))^2 + (u_2(t))^2\right) \mathrm{e}^{-2s} \frac{\mathrm{d}h_t^s(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \\ &= \int_a^\beta \left((u_1(t))^2 + (u_2(t))^2\right) \mathrm{d}t\,;\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s}\left(h_{x_1}^s\left(x_1(t^s)\right)\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^s x_1(t)\right)}{\frac{\mathrm{d}h_t^s(t)}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{e}^s \dot{x}_1(t)}{\mathrm{e}^{2s}} = \mathrm{e}^{-s} u_1(t) = u_1^s(t^s)\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s}\left(h_{x_2}^s\left(x_2(t^s)\right)\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^s x_2(t)\right)}{\frac{\mathrm{d}h_t^s(t)}{\mathrm{d}t}} = \mathrm{e}^{-s} \dot{x}_2(t) = \mathrm{e}^{-s} u_2(t) = u_2^s(t^s)\,;$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s}\left(h_{x_3}^s\left(x_3(t^s)\right)\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3s} x_3(t)\right)}{\frac{\mathrm{d}h_t^s(t)}{\mathrm{d}t}} = \mathrm{e}^s \dot{x}_3(t) = \mathrm{e}^s \left(x_2(t)\right)^2 u_1(t) \\ &= \left(h_{x_2}^s\left(x_2(t^s)\right)\right)^2 u_1^s(t^s)\,.\end{aligned}$$

Porque

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left(h^s_{x_1}\left(x_1(t^s)\right)\right)\Big|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{e}^s x_1(t)\right)\big|_{s=0} = x_1(t)\,,\\
\frac{\partial}{\partial s}\left(h^s_{x_2}\left(x_2(t^s)\right)\right)\Big|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{e}^s x_2(t)\right)\big|_{s=0} = x_2(t)\,,\\
\frac{\partial}{\partial s}\left(h^s_{x_3}\left(x_3(t^s)\right)\right)\Big|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{e}^{3s} x_3(t)\right)\Big|_{s=0} = 3x_3(t)\,,\\
\frac{\partial}{\partial s}\left(t^s\right)\big|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{e}^{2s} t\right)\Big|_{s=0} = 2t\,,
\end{aligned}$$

o Teorema 69 garante, então, que

$$\psi_1 x_1(t) + \psi_2(t) x_2(t) + 3\psi_3 x_3(t) - 2Ht \equiv constante\,, \tag{5.16}$$

$t \in [a,\, b]$, *ao longo das extremais de Pontryagin*

$$(x_1(\cdot), x_2(\cdot), x_3(\cdot), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \psi_0, \psi_1, \psi_2(\cdot), \psi_3)$$

do problema flat.

***Problema não* flat.** *Para* $\alpha \neq 0$, *o problema é invariante, no sentido da Definição 66, sob* $t^s = h^s_t(t) = \mathrm{e}^{2s}t$, $h^s_{x_1}\left(x_1(t^s)\right) = \frac{\mathrm{e}^s(\alpha x_1(t)+1)-1}{\alpha}$, $h^s_{x_2}\left(x_2(t^s)\right) = x_2\left(t\right)$, *e* $h^s_{x_3}\left(x_3(t^s)\right) = \mathrm{e}^s x_3\left(t\right)$, *novamente com* $\Phi^s \equiv 0$, $u^s_1(t^s) = \mathrm{e}^{-s}u_1\left(t\right)$ *e* $u^s_2(t^s) = \mathrm{e}^{-s}u_2\left(t\right)$. *A condição* (5.12), *de invariância para o Lagrangeano, foi já verificada para o caso* flat. *As condições* (5.13) *são facilmente aferidas:*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s}\left(h^s_{x_1}\left(x_1(t^s)\right)\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^s x_1(t) + \frac{\mathrm{e}^s-1}{\alpha}\right)}{\frac{\mathrm{d}h^s_t(t)}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{e}^s u_1(t)}{\mathrm{e}^{2s}} = \mathrm{e}^{-s}u_1(t) = u^s_1(t^s)\,,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s}\left(h^s_{x_2}\left(x_2(t^s)\right)\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_2(t)\right)}{\mathrm{e}^{2s}} = \frac{\mathrm{e}^{-s}u_2(t)}{\mathrm{e}^s\left(1+\alpha x_1(t)\right)} = \frac{u^s_2(t^s)}{1+\alpha h^s_{x_1}\left(x_1(t^s)\right)}\,,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s}\left(h^s_{x_3}\left(x_3(t^s)\right)\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^s x_3(t)\right)}{\mathrm{e}^{2s}} = \mathrm{e}^{-s}\dot{x}_3(t) = \left(x_2(t)\right)^2 \mathrm{e}^{-s}u_1(t) = \left[h^s_{x_2}\left(x_2(t^s)\right)\right]^2 u^s_1(t^s)\,.
\end{aligned}$$

Resulta do Teorema 69 que $\psi_1(t)\left(x_1(t) + \frac{1}{\alpha}\right) + \psi_3 x_3(t) - 2Ht$ *é um primeiro integral.*

5.2.4 Obtenção das transformações paramétricas h^s

Os resultados obtidos dependem da existência da família de transformações h^s. *Como obter tais transformações?* Este é o grande problema (*hoc opus hic labor est*), que infelizmente pouca atenção tem recebido. A obtenção das transformações de invariância não é óbvia e pode exigir considerável ingenuidade *ab initio*. A partir da nossa definição de quasi-invariância é, no entanto, mais fácil obter condições necessárias que permitam determinar uma família de transformações sob a qual um dado problema de controlo óptimo é quasi-invariante. Ilustraremos este facto com a ajuda de exemplos. Se apenas as transformações são conhecidas, as equações (5.17) e (5.18) representam equações diferenciais parciais de primeira-ordem nas funções desconhecidas L e φ e o Teorema 80 pode ser usado na caracterização de um conjunto de problemas de controlo óptimo que possuem propriedades de invariância fixas *à priori* (cf. Secção 3.5).

Teorema 80 *As condições*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial \Phi^s}{\partial s_k}\right|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial t}\left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial x}\cdot\left.\frac{\partial h_x^s}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial u}\cdot\left.\frac{\partial u^s}{\partial s_k}\right|_{s=0} + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s_k}\right|_{s=0}, \tag{5.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial h_x^s}{\partial s_k}\right|_{s=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\left.\frac{\partial h_x^s}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\left.\frac{\partial u^s}{\partial s_k}\right|_{s=0} + \varphi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s_k}\right|_{s=0}, \tag{5.18}$$

$k = 1, \ldots, \rho$, *são necessárias para o problema* (P) *ser quasi-invariante sob uma família* ρ*-paramétrica de transformações* h^s *a menos de* Φ^s *(cf. Definição 66).*

Demonstração. A demonstração é um exercício simples que se obtém da definição de quasi-invariância: utilizando as igualdades $h^0(t, x, u) = (t, x)$ e $u^0 = u$, basta diferenciar (5.14) e (5.13) em relação a s_k e depois fazer $s = 0$. ∎

Os próximos exemplos ilustram como o Teorema 80 pode ser usado na obtenção de famílias de transformações que mantêm o problema quasi-invariante no sentido das Definições 50 e 66. A possibilidade de invariância a menos de termos de ordem superior em relação aos parâmetros (quasi-invariância) é crucial, o que explica a ausência das condições necessárias do Teorema 80 na literatura (a noção de quasi-invariância é nova, tendo sido introduzida pelo autor em [272, 280]).

Exemplo 81 ($n = 4$, $r = 2$) *Revisitemos o problema*

$$\int_a^b \left((u_1(t))^2 + (u_2(t))^2\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_1(t)\left((x_1(t))^2 + (x_2(t))^2\right) + u_1(t) \\ \dot{x}_4(t) = -x_2(t)\left((x_1(t))^2 + (x_2(t))^2\right) + u_2(t)\,, \end{cases}$$

considerado no Exemplo 36 e procuremos uma família uni-paramétrica de transformações sem alteração da variável tempo ($h_t^s = t$) e com $\Phi^s \equiv 0$, sob a qual o problema é quasi-invariante.

O Teorema 80 afirma que as condições seguintes devem ser satisfeitas:

$$\begin{cases} u_1 \left.\dfrac{\partial u_1^s}{\partial s}\right|_{s=0} &= -u_2 \left.\dfrac{\partial u_2^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\dfrac{\partial h_{x_1}^s}{\partial s}\right|_{s=0} &= \left.\dfrac{\partial h_{x_3}^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\dfrac{\partial h_{x_2}^s}{\partial s}\right|_{s=0} &= \left.\dfrac{\partial h_{x_4}^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\dfrac{\partial h_{x_3}^s}{\partial s}\right|_{s=0} &= -\left(3x_1^2 + x_2^2\right) \left.\dfrac{\partial h_{x_1}^s}{\partial s}\right|_{s=0} - 2x_1x_2 \left.\dfrac{\partial h_{x_2}^s}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\dfrac{\partial u_1^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\dfrac{\partial h_{x_4}^s}{\partial s}\right|_{s=0} &= -2x_1x_2 \left.\dfrac{\partial h_{x_1}^s}{\partial s}\right|_{s=0} - \left(x_1^2 + 3x_2^2\right) \left.\dfrac{\partial h_{x_2}^s}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\dfrac{\partial u_2^s}{\partial s}\right|_{s=0} . \end{cases} \tag{5.19}$$

Obtém-se facilmente que (5.19) *é satisfeita com*

$$\left.\frac{\partial u_1^s}{\partial s}\right|_{s=0} = -u_2 \, , \quad \left.\frac{\partial u_2^s}{\partial s}\right|_{s=0} = u_1 \, ,$$

$$\left.\frac{\partial h_{x_1}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = -x_2 \, , \quad \left.\frac{\partial h_{x_2}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = x_1 \, , \quad \left.\frac{\partial h_{x_3}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = -x_4 \, , \quad \left.\frac{\partial h_{x_4}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = x_3 \, .$$

Escolhendo $u_1^s = u_1 - u_2 s$, $u_2^s = u_2 + u_1 s$, $h_{x_1}^s = x_1 - x_2 s$, $h_{x_2}^s = x_2 + x_1 s$, $h_{x_3}^s = x_3 - x_4 s$, $h_{x_4}^s = x_4 + x_3 s$, *podemos verificar que as condições* (5.5) *e* (5.3) *são de facto verdadeiras:*

$$L\left(u_1^s, u_2^s\right) = \left(u_1 - u_2 s\right)^2 + \left(u_2 + u_1 s\right)^2 = \left(u_1^2 + u_2^2\right) + \left(u_1^2 + u_2^2\right) s^2 = L(u_1, u_2) + \delta\left(u_1, u_2, s\right) \, ,$$

$$\varphi_1\left(h_{x_3}^s\right) = x_3 - x_4 s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_1 - x_2 s\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_{x_1}^s \, ,$$

$$\varphi_2\left(h_{x_4}^s\right) = x_4 + x_3 s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_2 + x_1 s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_{x_2}^s \, ,$$

$$\begin{aligned} \varphi_3\left(h_{x_1}^s, h_{x_2}^s, u_1^s\right) &= -\left(x_1 - x_2 s\right)\left((x_1 - x_2 s)^2 + (x_2 + x_1 s)^2\right) + u_1 - u_2 s \\ &= \left[-x_1(x_1^2 + x_2^2) + u_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)s - u_2 s\right] + \left[(x_2 s - x_1)(x_1^2 + x_2^2)s^2\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_{x_3}^s + \delta\left(x_1, x_2, s\right) \, , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4\left(h_{x_1}^s, h_{x_2}^s, u_2^s\right) &= -\left(x_2 + x_1 s\right)\left((x_1 - x_2 s)^2 + (x_2 + x_1 s)^2\right) + u_2 + u_1 s \\ &= \left[-x_2(x_1^2 + x_2^2) + u_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)s + u_1 s\right] + \left[(-x_2 - x_1 s)(x_1^2 + x_2^2)s^2\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_{x_4}^s + \delta\left(x_1, x_2, s\right) \, . \end{aligned}$$

A partir do Teorema 56 obtemos o primeiro integral (3.13)*:*

$$-\psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)x_1(t) - \psi_3(t)x_4(t) + \psi_4(t)x_3(t) \, .$$

O Exemplo 82 ilustra bem a efectividade do Teorema 80 na descoberta de uma família de transformações h^s que deixem o problema quasi-invariante: é relativamente fácil determinar h^s para a qual as condições (5.17) e (5.18) são satisfeitas, enquanto a verificação de (5.12) e (5.13), mesmo *à posteriori*, é tarefa muito mais trabalhosa.

Exemplo 82 **($n = 4$, $r = 2$)** *Consideremos agora o problema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = u_1(1+x_2) \\ \dot{x}_2 & = u_1 x_3 \\ \dot{x}_3 & = u_2 \\ \dot{x}_4 & = u_1 x_3^2 \end{cases}$$

com $L = u_1^2 + u_2^2$. Do Teorema 80 obtemos as seguintes condições necessárias para a transformação uni-paramétrica $h^s = \left(h_t^s, h_{x_1}^s, h_{x_2}^s, h_{x_3}^s, h_{x_4}^s\right)$ deixar o problema quasi-invariante a menos de Φ^s :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial \Phi^s}{\partial s}\right|_{s=0} & = 2u_1 \left.\frac{\partial u_1^s}{\partial s}\right|_{s=0} + 2u_2 \left.\frac{\partial u_2^s}{\partial s}\right|_{s=0} + \left(u_1^2 + u_2^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_{x_1}^s}{\partial s}\right|_{s=0} & = u_1 \left.\frac{\partial h_{x_2}^s}{\partial s}\right|_{s=0} + (1+x_2) \left.\frac{\partial u_1^s}{\partial s}\right|_{s=0} + u_1 (1+x_2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_{x_2}^s}{\partial s}\right|_{s=0} & = u_1 \left.\frac{\partial h_{x_3}^s}{\partial s}\right|_{s=0} + x_3 \left.\frac{\partial u_1^s}{\partial s}\right|_{s=0} + u_1 x_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_{x_3}^s}{\partial s}\right|_{s=0} & = \left.\frac{\partial u_2^s}{\partial s}\right|_{s=0} + u_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_{x_4}^s}{\partial s}\right|_{s=0} & = 2u_1 x_3 \left.\frac{\partial h_{x_3}^s}{\partial s}\right|_{s=0} + x_3^2 \left.\frac{\partial u_1^s}{\partial s}\right|_{s=0} + u_1 x_3^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s}\right|_{s=0} . \end{cases}$$

As condições são satisfeitas com $\Phi^s \equiv 0$ e

$$\left.\frac{\partial u_1^s}{\partial s}\right|_{s=0} = -u_1 \, , \quad \left.\frac{\partial u_2^s}{\partial s}\right|_{s=0} = -u_2 \, , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s}\right|_{s=0} = 2 \, ,$$
$$\left.\frac{\partial h_{x_1}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = 3x_1 \, , \quad \left.\frac{\partial h_{x_2}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = 2\left(1+x_2\right) \, , \quad \left.\frac{\partial h_{x_3}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = x_3 \, , \quad \left.\frac{\partial h_{x_4}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = 3x_4 \, .$$

Com as transformações $t^s = h_t^s(t) = t(1+2s)$, $u_1^s(t^s) = u_1(t)(1-s)$, $u_2^s(t^s) = u_2(t)(1-s)$, $h_{x_1}^s\left(x_1(t^s)\right) = x_1(t)(1+3s)$, $h_{x_2}^s\left(x_2(t^s)\right) = x_2(t) + 2s(1+x_2(t))$, $h_{x_3}^s\left(x_3(t^s)\right) = x_3(t)(1+s)$, $h_{x_4}^s\left(x_4(t^s)\right) = x_4(t)(1+3s)$, o problema é quasi-invariante, porquanto as condições (5.14) *e*

(5.13) *são satisfeitas:*

$$
\begin{aligned}
L\left(u_1^s(t^s), u_2^s(t^s)\right) \frac{\mathrm{d}t^s}{\mathrm{d}t} &= \left(u_1(t)^2 + u_2(t)^2\right) + \left(u_1(t)^2 + u_2(t)^2\right)(2s-3)\, s^2 \\
&= L\left(u_1(t), u_2(t)\right) + \delta\left(u_1(t), u_2(t), s\right) ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s}\left(h_{x_1}^s\left(x_1(t^s)\right)\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_1(t)(1+3s)\right)}{\frac{\mathrm{d}h_t^s(t)}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{x}_1(t)(1+3s)}{1+2s} \\
&= \frac{u_1(t)\left(1+x_2(t)\right)\left[(-4s^3+3s+1)+4s^3\right]}{1+2s} \\
&= \frac{u_1(t)\left(1+x_2(t)\right)\left[(1+s-2s^2)(1+2s)+4s^3\right]}{1+2s} \\
&= u_1(t)\left(1+x_2(t)\right)\left(1+s-2s^2\right) + \delta\left(x_2(t), u_1(t), s\right) \\
&= u_1(t)(1-s)(1+2s)\left(1+x_2(t)\right) + \delta\left(x_2(t), u_1(t), s\right) \\
&= u_1^s(t^s)\left(1+h_{x_2}^s\left(x_2(t^s)\right)\right) + \delta\left(x_2(t), u_1(t), s\right) \\
&= \varphi_1\left(h_{x_2}^s\left(x_2(t^s)\right), u_1^s(t^s)\right) + \delta\left(x_2(t), u_1(t), s\right) ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s}\left(h_{x_2}^s\left(x_2(t^s)\right)\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1+2s)x_2(t)+2s\right)}{1+2s} = \dot{x}_2(t) = u_1(t)x_3(t) \\
&= u_1(t)x_3(t)\left(1-s^2\right) + u_1(t)x_3(t)s^2 \\
&= u_1(t)(1-s)(1+s)x_3(t) + \delta\left(x_3(t), u_1(t), s\right) \\
&= u_1^s(t^s)h_{x_3}^s\left(x_3(t^s)\right) + \delta\left(x_3(t), u_1(t), s\right) \\
&= \varphi_2\left(h_{x_3}^s\left(x_3(t^s)\right), u_1^s(t^s)\right) + \delta\left(x_3(t), u_1(t), s\right) ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s}\left(h_{x_3}^s\left(x_3(t^s)\right)\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_3(t)(1+s)\right)}{1+2s} = \frac{(1+s)u_2(t)}{1+2s} = \frac{(1+s-2s^2)u_2(t)+2u_2(t)s^2}{1+2s} \\
&= \frac{(1-s)(1+2s)u_2(t)}{1+2s} + \delta\left(u_2(t), s\right) = u_2^s(t^s) + \delta\left(u_2(t), s\right) \\
&= \varphi_3\left(u_2^s(t^s)\right) + \delta\left(u_2(t), s\right) ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^s}\left(h_{x_4}^s\left(x_4(t^s)\right)\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_4(t)(1+3s)\right)}{1+2s} = \frac{\dot{x}_4(t)\left[(-s^3-s^2+s+1)(1+2s)-(1-3s-2s^2)s^2\right]}{1+2s} \\
&= u_1(t)\left(x_3(t)\right)^2\left(-s^3-s^2+s+1\right) + \delta\left(x_3(t), u_1(t), s\right) \\
&= u_1(t)(1-s)(1+s)^2\left(x_3(t)\right)^2 + \delta\left(x_3(t), u_1(t), s\right) \\
&= u_1^s(t^s)\left(h_{x_3}^s\left(x_3(t^s)\right)\right)^2 + \delta\left(x_3(t), u_1(t), s\right) \\
&= \varphi_4\left(h_{x_3}^s\left(x_3(t^s)\right), u_1^s(t^s)\right) + \delta\left(x_3(t), u_1(t), s\right) .
\end{aligned}
$$

Do Teorema 69 obtemos o seguinte primeiro integral:

$$3\psi_1(t)x_1(t) + 2\psi_2(t)(1+x_2(t)) + \psi_3(t)x_3(t) + 3\psi_4(t)x_4(t) - 2tH \,, \tag{5.20}$$

com $H = \psi_0\left((u_1(t))^2 + (u_2(t))^2\right) + \psi_1(t)u_1(t)\left(1 + x_2(t)\right) + \psi_2(t)u_1(t)x_3(t) + \psi_3(t)u_2(t) + \psi_4(t)u_1(t)\left(x_3(t)\right)^2$.

Observação 83 *Todas as leis de conservação que obtivemos nos exemplos anteriores são não-evidentes e inesperadas* à priori. *No entanto, uma vez obtidas, elas podem ser verificadas, por diferenciação, usando o correspondente sistema adjunto* $\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ *e a condição de extremalidade* $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$. *Vamos ilustrar esta questão para o Exemplo 82. Do sistema adjunto obtemos que* ψ_1 *e* ψ_4 *são constantes, enquanto* $\psi_2(t)$ *e* $\psi_3(t)$ *satisfazem* $\dot{\psi}_2(t) = -\psi_1 u_1(t)$, $\dot{\psi}_3(t) = -\psi_2(t)u_1(t) - 2\psi_4 u_1(t)x_3(t)$. *Tendo em mente que o problema é autónomo, e que por conseguinte o Hamiltoniano* H *é constante ao longo das extremais (cf. Capítulo 3 ou Observação 73), a diferenciação de* (5.20) *permite-nos escrever que*

$$
\begin{aligned}
3\psi_1 u_1(t)\left(1 + x_2(t)\right) - 2\psi_1 u_1(t)\left(1 + x_2(t)\right) + 2\psi_2(t)u_1(t)x_3(t) - \psi_2(t)u_1(t)x_3(t) \\
- 2\psi_4 u_1(t)\left(x_3(t)\right)^2 + \psi_3(t)u_2(t) + 3\psi_4 u_1(t)\left(x_3(t)\right)^2 - 2H = 0\,,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\psi_1\left(1 + x_2(t)\right)u_1(t) + \psi_2(t)x_3(t)u_1(t) + \psi_3(t)u_2(t) + \psi_4\left(x_3(t)\right)^2 u_1(t) = 2H\,. \tag{5.21}
$$

Da definição do Hamiltoniano, a igualdade (5.21) *é equivalente a* $H = -\psi_0\left((u_1(t))^2 + (u_2(t))^2\right)$, *uma relação sustentada pela condição de extremalidade:*

$$
\begin{cases}
2\psi_0 u_1(t) + \psi_1\left(1 + x_2(t)\right) + \psi_2(t)x_3(t) + \psi_4\left(x_3(t)\right)^2 = 0 \\
2\psi_0 u_2(t) + \psi_3(t) = 0
\end{cases}
$$
$$
\Rightarrow \begin{cases}
\psi_1\left(1 + x_2(t)\right)u_1(t) + \psi_2(t)x_3(t)u_1(t) + \psi_4\left(x_3(t)\right)^2 u_1(t) = -2\psi_0\left(u_1(t)\right)^2 \\
\psi_3(t)u_2(t) = -2\psi_0\left(u_2(t)\right)^2\,.
\end{cases}
$$

A Proposição 84 engloba alguns dos exemplos que já vimos. Em particular, alarga o estudo do caso *flat* do problema de Martinet da geometria sub-Riemanniana em §5.2.3 (veja-se o Exemplo 86 a seguir), ao caso geral homogéneo.

Proposição 84 *Se existirem constantes* α, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \mathbb{R}$, *tais que para todos os* $\lambda > 0$

$$
L\left(\lambda^{\alpha}t, \lambda^{\beta_1}x_1, \ldots, \lambda^{\beta_n}x_n, \lambda^{\gamma_1}u_1, \ldots, \lambda^{\gamma_r}u_r\right) = \lambda^{-\alpha}L\left(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r\right)\,, \tag{5.22}
$$

$$
\varphi_i\left(\lambda^{\alpha}t, \lambda^{\beta_1}x_1, \ldots, \lambda^{\beta_n}x_n, \lambda^{\gamma_1}u_1, \ldots, \lambda^{\gamma_r}u_r\right) = \lambda^{\beta_i - \alpha}\varphi_i\left(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r\right)\,, \tag{5.23}
$$

$$
(i = 1, \ldots, n)
$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \psi_i(t) x_i(t) - \alpha H\left(t, x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)\right) t \equiv \textit{constante}$$

ao longo de uma qualquer extremal de Pontryagin $(x(\cdot), u(\cdot), \psi_0, \psi(\cdot))$ *de* (P).

Demonstração. Diferenciando (5.22) e (5.23) em relação a λ e colocando de seguida $\lambda = 1$, obtemos

$$\alpha L(t,x,u) + \alpha \frac{\partial L(t,x,u)}{\partial t} t + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\partial L(t,x,u)}{\partial x_j} x_j + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \frac{\partial L}{\partial u_k} u_k = 0\,,$$

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta_i)\,\varphi_i(t,x,u) + \alpha \frac{\partial \varphi_i(t,x,u)}{\partial t} t + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\partial \varphi_i(t,x,u)}{\partial x_j} x_j & \\ + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \frac{\partial \varphi_i(t,x,u)}{\partial u_k} u_k &= 0\,.\end{aligned}$$

Destas equações concluímos que as condições (5.17) e (5.18) do Teorema 80 são satisfeitas se escolhermos $\Phi^s \equiv 0$ e uma família uni-paramétrica de transformações tal que

$$\left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s}\right|_{s=0} = \alpha t\,, \ \left.\frac{\partial h_{x_i}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = \beta_i x_i\,, \ \left.\frac{\partial u_k^s}{\partial s}\right|_{s=0} = \gamma_k u_k\,. \tag{5.24}$$

Para isso é suficiente escolher $t^s = h_t^s(t) = \mathrm{e}^{\alpha s} t$, $h_{x_i}^s\left(x_i(t^s)\right) = \mathrm{e}^{\beta_i s} x_i(t)\,(i = 1, \ldots, n)$ e $u_k^s(t^s) = \mathrm{e}^{\gamma_k s} u_k(t)\,(k = 1, \ldots, r)$. Segundo a Definição 66 o problema é invariante sob estas transformações (deixamos como exercício a verificação de que este é de facto o caso) e a conclusão pretendida é obtida do Teorema 69. ■

Observação 85 *É possível demonstrar a Proposição 84 com outras escolhas para a família de transformações paramétrica satisfazendo* (5.24). *Por exemplo, a mesma conclusão é obtida do Teorema 69 com* $t^s = h_t^s(t) = (s+1)^{\alpha} t$, $h_{x_i}^s\left(x_i(t^s)\right) = (s+1)^{\beta_i} x_i(t)$, $u_k^s(t^s) = (s+1)^{\gamma_k} u_k(t)$, *e* $\Phi^s \equiv 0$; *ou* $t^s = h_t^s(t) = (1 + \alpha s)t$, $h_{x_i}^s\left(x_i(t^s)\right) = (1 + \beta_i s) x_i(t)$, *e* $u_k^s(t^s) = (1 + \gamma_k s) u_k(t)$.

Exemplo 86 ($n = 3$, $r = 2$) *Para o problema* flat *de Martinet da geometria sub-Riemanniana (cf. Exemplo 79),* $L(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$, $\varphi_1(u_1) = u_1$, $\varphi_2(u_2) = u_2$, $\varphi_3(x_2, u_1) = u_1 x_2^2$. *Para* $\alpha = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = -1$, *tem-se* $L\left(\lambda^{\gamma_1} u_1, \lambda^{\gamma_2} u_2\right) = \left(\lambda^{-1} u_1\right)^2 + \left(\lambda^{-1} u_2\right)^2 = \lambda^{-\alpha} L(u_1, u_2)$, $\varphi_1\left(\lambda^{\gamma_1} u_1\right) = \lambda^{-1} u_1 = \lambda^{\beta_1 - \alpha} \varphi_1(u_1)$, $\varphi_2\left(\lambda^{\gamma_2} u_2\right) = \lambda^{-1} u_2 = \lambda^{\beta_2 - \alpha} \varphi_2(u_2)$, $\varphi_3\left(\lambda^{\beta_2} x_2, \lambda^{\gamma_1} u_1\right) = \lambda u_1 x_2^2 = \lambda^{\beta_3 - \alpha} \varphi_3(x_2, u_1)$, *e obtém-se da Proposição 84 a lei de conservação* (5.16).

Exemplo 87 *A Proposição 41 é obtida da Proposição 84 fazendo* $\alpha = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ *e* $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$.

Exemplo 88 *O Exemplo 77 está coberto pela Proposição 84:* $\alpha = -1$, $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 = 1$.

Vamos agora considerar problemas autónomos do controlo óptimo como o dos Exemplos 81 e 40, sujeitos a uma dinâmica afim de controlo com rumo (*drift*). [9] Notamos, de novo, que, em todos os casos, a nossa versão do teorema de Noether é indispensável. Com efeito, em todos os exemplos, a aplicação do Teorema 69 será feita sob a noção de quasi-invariância – invariância a menos de termos de ordem superior no parâmetro s – e, por isso, os primeiros integrais que obtemos não podem ser deduzidos a partir dos resultados em [290, 232, 31, 32, 266, 270, 275].

Exemplo 89 ($n = 2$, $r = 1$) *Considere-se* (P) *com* $L = u^2$, $\varphi_1 = 1 + y^2$ *e* $\varphi_2 = u$ *:*

$$\int_a^b (u(t))^2 \, \mathrm{d}t \longrightarrow \min \, ,$$
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 + (y(t))^2 \, , \\ \dot{y}(t) = u(t) \, . \end{cases}$$

Do Teorema 80 obtemos as seguintes condições necessárias para o problema ser quasi-invariante sob a transformação uni-paramétrica $h^s = \left(h_t^s, h_x^s, h_y^s\right)$ *:*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial \Phi^s}{\partial s}\right|_{s=0} = 2u \left.\frac{\partial u^s}{\partial s}\right|_{s=0} + u^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_x^s}{\partial s}\right|_{s=0} = 2y \left.\frac{\partial h_y^s}{\partial s}\right|_{s=0} + \left(1 + y^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_y^s}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial u^s}{\partial s}\right|_{s=0} + u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial h_t^s}{\partial s}\right|_{s=0} \, . \end{cases}$$

Estas condições são satisfeitas através de $\Phi^s \equiv 0$, $h_t^s = t(1 - 2s)$, $u^s = u(1 + s)$, $h_x^s = x + 2s(t - 2x)$, *e* $h_y^s = y(1 - s)$, *para as quais o problema é quasi-invariante:*

$$\begin{aligned} L\left(u^s\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_t^s &= u^2 \left(1 + s\right)^2 \left(1 - 2s\right) = u^2 - \left(3 + 2s\right) u^2 s^2 = L + \delta\left(u, s\right) \, , \\ \varphi_1\left(h_y^s\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_t^s &= \left[1 + y^2 (1 - s)^2\right] (1 - 2s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x + 2s(t - 2x)\right] + \left(5y^2 - 2y^2 s\right) s^2 \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_x^s + \delta\left(y, s\right) \, , \\ \varphi_2\left(u^s\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_t^s &= u(1 + s)(1 - 2s) = u(1 - s) - 2us^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_y^s + \delta\left(u, s\right) \, . \end{aligned}$$

[9] Isto é, consideramos exemplos de (P) com $\varphi(x, u) = f(x) + g(x) \cdot u$ e em que $f(x)$ (rumo) é não nulo.

Do Teorema 69 obtemos a lei de conservação

$$2\psi_x\left(t - 2x(t)\right) - \psi_y(t)y(t) + 2Ht \equiv \textit{constante}\,,$$

onde $H = \psi_0\left(u(t)\right)^2 + \psi_x\left[1 + \left(y(t)\right)^2\right] + \psi_y(t)u(t)$.

Nos próximos dois exemplos, estabelecemos leis de conservação para o problema de tempo mínimo.

Exemplo 90 ($n = 4$, $r = 1$) *Considere-se o problema de tempo mínimo com sistema de controlo*

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = 1 + x_2(t)\,, \\ \dot{x_2}(t) = x_3(t)\,, \\ \dot{x_3}(t) = u(t)\,, \\ \dot{x_4}(t) = \left(x_3(t)\right)^2 - \left(x_2(t)\right)^2\,. \end{cases}$$

Neste caso o Lagrangeano é dado por $L = 1$ *e, de modo a satisfazer-mos a condição* (5.17) *do Teorema 80, fixamos* $h_t^s = t$ *(sem transformação da variável tempo) e* $\Phi^s \equiv 0$*. A funcional é invariante e a condição* (5.18) *toma a forma*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial h_{x_1}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial h_{x_2}^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial h_{x_2}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial h_{x_3}^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial h_{x_3}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial u^s}{\partial s}\right|_{s=0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial h_{x_4}^s}{\partial s}\right|_{s=0} = -2x_2\left.\frac{\partial h_{x_2}^s}{\partial s}\right|_{s=0} + 2x_3\left.\frac{\partial h_{x_3}^s}{\partial s}\right|_{s=0}\,. \end{cases}$$

É agora um exercício simples concluir que o problema é quasi-invariante, no sentido da Definição 66 ou 50, sob $h_{x_1}^s = (x_1 - t)s + x_1$, $h_{x_2}^s = x_2(s+1)$, $h_{x_3}^s = x_3(s+1)$, $h_{x_4}^s = x_4(2s+1)$, $u^s = u(s+1)$ *:*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{x_1}^s &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(x_1 - t)s + x_1\right] = \left(\dot{x_1} - 1\right)s + \dot{x_1} = x_2 s + x_2 + 1 = 1 + h_{x_2}^s\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{x_2}^s &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x_2(s+1)\right] = \dot{x_2}(s+1) = x_3(s+1) = h_{x_3}^s\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{x_3}^s &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x_3(s+1)\right] = u(s+1) = u^s\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{x_4}^s &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x_4(2s+1)\right] = \dot{x_4}(2s+1) = \left(x_3^2 - x_2^2\right)(2s+1) = \left(h_{x_3}^s\right)^2 - \left(h_{x_2}^s\right)^2 - \delta\left(x_2, x_3, s\right)\,,
\end{aligned}$$

com $\delta(x_2, x_3, s) = s^2\left(x_3^2 - x_2^2\right)$. *Obtemos do Teorema 56 a lei de conservação*

$$\psi_1(t)\,(x_1(t) - t) + \psi_2(t)x_2(t) + \psi_3(t)x_3(t) + 2\psi_4(t)x_4(t) \equiv \textit{constante}\,. \tag{5.25}$$

Exemplo 91 ($n = 3$, $r = 1$) *Consideramos agora o problema de tempo mínimo ($L = 1$) com sistema de controlo*

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + y^2 - z^2\,, \\ \dot{y} = z\,, \\ \dot{z} = u\,. \end{cases}$$

Do Teorema 80 podemos facilmente obter a transformação uni-paramétrica $h^s(t, x, y, z, u) = (t, 2(x - t)s + x, y(s + 1), z(s + 1))$, *para a qual o problema é quasi-invariante* ($\Phi^s \equiv 0$, $u^s = u(s + 1)$)*:*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_x^s &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[2(x - t)s + x\right] = (2s + 1)(y^2 - z^2) + 1 = 1 + (h_y^s)^2 - (h_z^s)^2 - \delta(y, z, s)\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_y^s &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[y(s + 1)\right] = z(s + 1) = h_z^s\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_z^s &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[z(s + 1)\right] = u(s + 1) = u^s\,,
\end{aligned}$$

com $\delta(y, z, s) = s^2\left(y^2 - z^2\right)$. *O primeiro integral*

$$2\psi_x(x - t) + \psi_y y + \psi_z z \tag{5.26}$$

está associado à transformação.

Se nos Exemplos 90 e 91, ao invés do problema de tempo mínimo, considerarmos o problema (P) com $I[u(\cdot)] = \int_a^b u(t)\mathrm{d}t \longrightarrow \min$, as mesmas transformações paramétricas são efectivas escolhendo funções Φ^s adequadas: respectivamente $\Phi^s = sx_3$ e $\Phi^s = sz$. As novas funcionais tornam-se invariantes a menos do respectivo diferencial exacto e os termos $\psi_0 x_3$ e $\psi_0 z$ devem ser adicionados, respectivamente, à lei de conservação (5.25) e ao primeiro integral (5.26).

5.3 Consignação

Neste capítulo propusemos uma abordagem geral ao (primeiro) teorema de Noether para problemas do controlo óptimo. Mesmo para a situação muito particular do problema fundamental do cálculo das variações, somos capazes de cobrir novas situações não tratadas pelos resultados encontrados na literatura.

Recentemente, um teorema de Noether no contexto do controlo óptimo foi publicado em [31, 32]. Em contraste com [31, 32], lidamos com problemas não autónomos (cf. v.g. a Proposição 84 e o Exemplo 88), consideramos transformações paramétricas dependentes das variáveis de tempo, estado e controlo e tratamos quer as extremais normais quer as anormais.

Os resultados em [290, 292], [232], [138] e [31, 32] (tal como o Teorema 56) apenas consideram transformações de estado. Os primeiros integrais que obtivemos, por exemplo, para o problema de Martinet (cf. Exemplo 79), não podem ser deduzidos unicamente a partir de transformações de estado, nem podem ser obtidos pela introdução de uma variável de estado extra t ($t' = 1$).

Os resultados deste capítulo têm epigénese nos seguintes dois seminários, proferidos pelo autor, em Março de 2000, no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro:

- *Condições de transversalidade no Cálculo das Variações, forma Hamiltoniana e primeiros integrais das equações de Euler-Lagrange*;
- *O teorema de Noether no Cálculo das Variações e suas aplicações em Física.*

Investigação posterior originou os três "research reports" [264, 265, 272]. Parte dessa investigação foi apresentada pelo autor em três conferências internacionais:

- Em Abril de 2001 participou no *Third Nonlinear Control Network (NCN) Workshop "Dynamics, Bifurcations and Control"*, que se realizou em Kloster, Irsee, na Alemanha, com uma palestra intitulada *Conservation Laws in Optimal Control* (*vide* [270]).
- Em Setembro de 2001 apresentou, na *Invited Session "Optimal Control Theory"* da *6th European Control Conference*, ECC 2001, Porto, Portugal, o trabalho *On the Noether Theorem for Optimal Control* (*vide* [266]).
- Em Julho de 2002 integrou a *Invited Session "Control, Optimization and Computation"* da *10th Mediterranean Conference on Control and Automation*, MED2002, que se realizou em Lisboa, com o artigo *Conserved Quantities along the Pontryagin Extremals of Quasi-Invariant Optimal Control Problems* (*vide* [271]).

As seguintes publicações de 2002 encontram-se disponíveis: [275, 270] ([270] já consta nas *Mathematical Reviews*). Os resultados do capítulo que ainda não foram publicados, estão submetidos à revista *Portugaliæ Mathematica* [280].

"What is now proved was once only imagined."

—William Blake

"I shall do my best to modernize my language and notions, but I am well aware of my shortcomings in that respect; I can assure you, at any rate, that my intentions are honourable and my results invariant, probably canonical, perhaps even functional. But please allow me to assume that the characteristic is not 2."

—Rudolph Lipschitz

6

Regularidade Lipschitziana dos minimizantes

Consideramos o problema de Lagrange do controlo óptimo (P) com controlos (*à priori*) não restritos: $u \in \mathbb{R}^r$. Estudamos a questão: sob que condições é possível assegurar que os controlos minimizantes do problema são limitados? Este quesito está relacionado com o da regularidade Lipschitziana das trajectórias óptimas e a sua resposta é crucial para encerrar as discrepâncias entre as condições da teoria da existência e as que asseguram a aplicabilidade de muitas condições necessárias de optimalidade como, por exemplo, o princípio do máximo de Pontryagin ou a equação de Euler-Lagrange. Obtemos respostas satisfatórias reescrevendo o problema numa forma equivalente e estabelecendo uma relação entre as condições de aplicabilidade do princípio do máximo de Pontryagin ao segundo problema e as condições de regularidade Lipschitziana para o problema original. Sob as hipóteses standard de coercividade da teoria da existência, as condições obtidas implicam que os controlos óptimos do problema original são essencialmente limitados, assegurando a validade das condições necessárias de optimalidade. Na Secção 6.2.1 deliberamos sobre o caso importante de dinâmica afim de controlo, $\varphi(t,x,u) = f(t,x) + g(t,x) \cdot u$, reescrevendo o problema na forma compactificada de Gamkrelidze introduzida no Capítulo 2. Como corolário, obtemos novas condições de regularidade Lipschitziana para os minimizantes do problema fundamental do cálculo das variações e para os problemas do cálculo das variações com derivadas de ordem superior (§6.2.2). Em §6.2.3 consideramos como problema auxiliar a forma paramétrica (P_τ), igualmente introduzida no Capítulo 2, e tratamos a situação genérica dos problemas de controlo óptimo com dinâmica não linear.

6.1 Intróito

Neste capítulo consideramos o problema de controlo óptimo (P) com $\mathcal{U} = L_1([a,b];\mathbb{R}^r)$. Notar que não incluímos restrições aos valores dos controlos ($\Omega = \mathbb{R}^r$). É então possível que os valores dos controlos óptimos sejam não-limitados (que as trajectórias óptimas sejam não-Lipschitzianas).

Sob as hipóteses standard da teoria da existência de Tonelli do cálculo das variações, a existência de minimizantes é garantida na classe das funções absolutamente contínuas, possivelmente com derivada não limitada. De modo semelhante, no controlo óptimo as técnicas da teoria da existência usam argumentos de compacidade que exigem trabalhar com funções de controlo mensuráveis de L_p, $1 \leq p < \infty$ (*vide* v.g. [52]). Por outro lado, as condições necessárias standard de optimalidade, como o clássico princípio do máximo de Pontryagin [199], colocam certas restrições aos controlos óptimos – designadamente, supõe-se *à priori* que eles são essencialmente limitados. Como é conhecido, mesmo para Lagrangeanos polinomiais e dinâmica linear (cf. [20]), os controlos óptimos previstos pela teoria da existência podem ser não limitados e falhar as condições de optimalidade, como seja a equação de Euler-Lagrange. O seguinte problema ilustra tal possibilidade:

$$\begin{gathered}
\int_0^1 \left\{c(u(t))^2 + \left((x(t))^3 - t^2\right)^2 (u(t))^{14}\right\} \mathrm{d}t \longrightarrow \min\,, \\
\dot{x}(t) = u(t)\,, \\
x(\cdot) \in W_{1,1}\left([0,1];\mathbb{R}\right)\,, \quad u(\cdot) \in L_1\left([0,1];\mathbb{R}\right)\,, \\
x(0) = 0\,, \quad x(1) = k\,,
\end{gathered} \tag{6.1}$$

onde $c > 0$ e k são constantes. É fácil verificar que as hipóteses do Teorema da existência de Tonelli são satisfeitas (cf. Teorema 102). Este problema foi proposto por Ball e Mizel [19], que conjecturaram que a função não-Lipschitziana $\tilde{x}(t) = kt^{2/3}$ é a única trajectória óptima do problema quando c e k satisfazem a igualdade

$$c = \left(\frac{2k}{3}\right)^{12} \left(1 - k^3\right)\left(13k^3 - 7\right)\,.$$

Este facto foi confirmado por Clarke e Vinter em [67], usando o método de verificação de Hamilton-Jacobi (*vide* [58, §3.7] ou [61, Cap. 3] para uma discussão deste tópico), constituindo (6.1) o primeiro exemplo de que, sob as hipóteses do Teorema da existência de Tonelli, a trajectória óptima pode ser não-Lipschitziana. Note-se que $\dot{\psi}(t) = \frac{\partial L}{\partial x}\left(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\right) \sim t^{-4/3}$ não é integrável ($\psi(t) \sim t^{-1/3}$ não é uma função absolutamente contínua) e por conseguinte o minimizante $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ não satisfaz o princípio do máximo de Pontryagin. Isto deve-se ao facto de $\tilde{u}(t) = \frac{2}{3}kt^{-1/3} \in L_1$, embora integrável, não ser limitado para $t = 0$. Se formos capazes de afiançar que os minimizantes $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$, $a \leq t \leq b$, do nosso problema são tais que $\tilde{u}(\cdot)$ é essencialmente limitado, então as soluções podem ser identificadas por via do princípio do máximo. Nesse caso, como $\varphi(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ é limitado, segue-se também que as trajectórias óptimas $\tilde{x}(\cdot)$ são Lipschitzianas. Similarmente, os multiplicadores Hamiltonianos $\tilde{\psi}(\cdot)$ do princípio do máximo de Pontryagin são igualmente Lipschitzianos. Assim, a teoria de regularidade justifica a procura dos minimizantes entre as extremais e estabelece uma forma mais fraca do princípio do máximo no qual não se requer que os multiplicadores Hamiltonianos sejam absolutamente contínuos mas meramente Lipschitzianos. Como mostraremos neste capítulo, a teoria da regularidade é não só geradora de novas condições de optimalidade mas também fruto das condições necessárias.

Além de assegurar a validade das condições necessárias de optimalidade sob as hipóteses da teoria da existência (cf. [63]), a regularidade Lipschitziana tem outras implicações importantes. Em aplicações de engenharia, onde as estratégias optimizantes são implementadas por intermédio de computadores, a escolha da discretização e dos processos numéricos dependem da regularidade dos minimizantes (*vide* v.g. [20, 294]). Quando os minimizantes são Lipschitzianos a aproximação de Rayleigh-Ritz é, por exemplo, justificada. A regularidade Lipschitziana das trajectórias óptimas exclui também a ocorrência do indesejável fenómeno de Lavrentiev (*vide* v.g. [176, 175, 54, 168, 150]).

Embora seja natural ansiar por condições de regularidade, simples, que garantam que os controlos óptimos $\tilde{u}(\cdot)$ sejam essencialmente limitados (as correspondentes trajectórias óptimas $\tilde{x}(\cdot)$ serão então Lipschitzianas), o estudo da regularidade Lipschitziana tem recebido pouca atenção quando comparamos, por exemplo, com o tópico da existência ou o das condições necessárias, que têm sido muito bem estudados desde os anos cinquenta e sessenta. A maior parte dos resultados de regularidade obtidos (começando com os de Leonida Tonelli) referem-se ao problema fundamental do cálculo das variações (*vide* [11, 27, 68, 66, 69, 60, 70, 181, 254]). Menos é sabido para os problemas com derivadas de ordem superior ([72]). Para um *survey* veja-se [61, Ch. 2] ou [295, Ch. 11]. Para o problema de Lagrange, e para os problemas do controlo óptimo, os resultados de regularidade são uma raridade. Estamos apenas informados dos progressos devido a F. H. Clarke & R. B. Vinter ([71]) para problemas associados a dinâmica autónoma (i.e. invariante no tempo) e linear (veja-se também [54], [295, §11.6]). Para esta classe particular de problemas, os resultados de regularidade são obtidos por intermédio da transformação do problema inicial num problema do cálculo das variações com derivadas de ordem superior. A questão da regularidade Lipschitziana para o problema genérico de Lagrange do controlo óptimo, com dinâmica não linear, foi considerada extremamente difícil (cf. v.g. [71]) e respostas faltam. Para lidarmos com o problema desenvolvemos neste trabalho uma abordagem diferente.

Começamos por estabelecer regularidade Lipschitziana (controlos minimizantes limitados) para o problema de Lagrange com funcional $\int_a^b L(t, x(t), u(t))\, dt$ e dinâmica não autónoma e afim de controlo: $\dot{x} = f(t, x) + g(t, x) \cdot u$. Esta classe de sistemas surgem numa variada gama de problemas relevantes na mecânica, geometria sub-Riemanniana, etc. Fazemos uso da redução do problema de Lagrange do controlo óptimo ao problema autónomo de tempo mínimo (1.19) com a subsequente compactificação do conjunto dos valores de controlo: problema (2.11)–(2.13). Se o princípio do máximo de Pontryagin for aplicável ao problema compactificado (2.11)–(2.13), podemos usar a sua formulação e a relação entre as extremais dos dois problemas, estabelecida no Capítulo 4, para derivar condições que garantam que os controlos minimizantes do problema original de Lagrange são limitados, determinando, inclusive, majorantes para as suas magnitudes. O resultado principal é o Teorema 92. Como seus corolários obtemos (Secção 6.2.2) resultados de regularidade Lipschitziana para os minimizantes do cálculo das variações (*vide* [263, Parte Original]).

Na Secção 6.2.3 obtemos resultados para a situação genérica, quando a dinâmica é não linear quer em relação às variáveis de estado quer em relação às variáveis de controlo. Para isso usamos a ideia de reparametrização do tempo introduzida em §2.3 e a relação entre as extremais que demonstrámos em §4.3. Damos exemplos que possuem minimizantes de acordo com a teoria da existência e para os quais os nossos resultados são conclusivos enquanto que os resultados prévios de regularidade não são aplicáveis.

6.2 Contribuição original: regularidade para o problema de Lagrange

Estamos interessados no estudo de condições de regularidade Lipschitziana para o problema de Lagrange do controlo óptimo com condições de fronteira arbitrárias. O leitor pode facilmente seguir os nossos argumentos para o caso quando as condições de fronteira são fixas: $x(a) = x_a$, $x(b) = x_b$ (cf. [217, 276, 279]). Na verdade este caso é suficiente: se $\tilde{x}(\cdot)$ é uma trajectória minimizante para o problema de Lagrange com qualquer outras condições de fronteira, então $\tilde{x}(\cdot)$ é também uma trajectória minimizante para o correspondente problema com condições de fronteira fixas: $x_a = \tilde{x}(a)$ e $x_b = \tilde{x}(b)$.

Assumimos que $L(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot) \in C$, e $\varphi(\cdot,\cdot,u)$, $\varphi(\cdot,\cdot,u) \in C^1$. Estas hipóteses de suavidade em L e φ podem ser enfraquecidas, como será discutido em §6.2.3, pág. 107, em ligação com as condições de aplicabilidade do princípio do máximo de Pontryagin.

6.2.1 Dinâmica afim de controlo

Estamos interessados, por agora, no estudo dos minimizantes do problema (P) com dinâmica afim de controlo (2.6):

$$I\left[x\left(\cdot\right),u\left(\cdot\right)\right]=\int_a^b L\left(t,x\left(t\right),u\left(t\right)\right)\,\mathrm{d}t\longrightarrow\min \tag{P_{afim}}$$
$$\dot{x}\left(t\right)=f\left(t,x\left(t\right)\right)+g\left(t,x\left(t\right)\right)\cdot u\left(t\right)\,,\qquad q.t.p.\text{ de }\left[a,b\right]\,,$$
$$x\left(\cdot\right)\in W_{1,1}\left(\left[a,b\right];\mathbb{R}^n\right)\,,\quad u\left(\cdot\right)\in L_1\left(\left[a,b\right];\mathbb{R}^r\right)\,.$$

Aqui $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$; $L:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ e $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times r}$ são funções dadas; $r\leq n$; $u=(u_1,\ldots,u_r)\in\mathbb{R}^r$, $g\left(t,x\right)=\left(g^1\left(t,x\right),\ldots,g^r\left(t,x\right)\right)$. Os controlos $u\left(\cdot\right)$ são integráveis. Uma solução $x\left(\cdot\right)$, absolutamente contínua, da equação diferencial de controlo é a *trajectória de estado* correspondente ao controlo $u\left(\cdot\right)$. Assumimos que $f\left(\cdot,\cdot\right)$ e $g\left(\cdot,\cdot\right)$ são funções da classe C^1 em $\mathbb{R}^{1+n}$.

Teorema 92 *Seja* $L(\cdot,\cdot,\cdot)\in C^1\left([a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r;\mathbb{R}\right)$*,* $f\left(\cdot,\cdot\right)\in C^1\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$*,* $g\left(\cdot,\cdot\right)\in C^1\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times r}\right)$*; e*

$$\varphi\left(t,x,u\right)=f\left(t,x\right)+g\left(t,x\right)\cdot u\,.$$

Sob as hipóteses de característica completa e de coercividade da Secção 2.2 (cf. condições (H1) e (H2) na pág. 29), a condição de crescimento

(H3) – condição de regularidade: *existem constantes* γ*,* β*,* η *e* μ*, com* $\gamma>0$*,* $\beta<2$ *e* $\mu\geq\max\left\{\beta-2,\,-2\right\}$*, tais que para todo o* $t\in[a,b]$*,* $x\in\mathbb{R}^n$ *e* $u\in\mathbb{R}^r$

$$\left(\left|L_t\right|+\left|L_{x^i}\right|+\left\|L\,\varphi_t-L_t\,\varphi\right\|+\left\|L\,\varphi_{x^i}-L_{x^i}\,\varphi\right\|\,\right)\,\|u\|^\mu\leq\gamma\,L^\beta+\eta\,,$$

$$i\in\left\{1,\ldots,n\right\}\,;$$

implica que todos os minimizantes $\tilde{u}\left(\cdot\right)$ *do problema de controlo óptimo* (P_{afim})*, que não são controlos extremais anormais, são essencialmente limitados em* $[a,b]$*.*

Observação 93 *Lembramos que se a dinâmica for controlável (o que é verdade para os problemas do cálculo das variações tratados em §6.2.2), todas as extremais são normais.*

À *priori*, um minimizante $\tilde{u}\left(\cdot\right)$ que não é essencialmente limitado, pode não satisfazer o princípio do máximo de Pontryagin e, por conseguinte, não ser uma extremal. No que diz respeito aos controlos minimizantes essencialmente limitados, o princípio do máximo de Pontryagin é válido. Os controlos minimizantes não limitados $\tilde{u}\left(\cdot\right)$, a existir, são, de acordo com o Teorema 92, controlos extremais anormais. Obtemos então o seguinte Corolário.

Corolário 94 *Sob as condições do Teorema 92 todos os minimizantes do problema de Lagrange* (P_{afim}) *satisfazem o princípio do máximo de Pontryagin.*

Observação 95 *Podemos impor formas mais fortes, mas tecnicamente mais simples, da hipótese (H3) no Teorema 92. Debaixo destas condições o Teorema 92 perde alguma generalidade mas, por vezes, para um problema concreto, estas condições tornam-se mais fáceis de verificar. Por exemplo elas podem ser: (em ordem crescente de simplicidade e em ordem decrescente de generalidade)*

$$\begin{gathered}
\left[L\,(\|\varphi_t\| + \|\varphi_{x^i}\|) + \|\varphi\|\,(|L_t| + |L_{x^i}|\,)\right]\,\|u\|^{\mu} \leq \gamma\, L^{\beta} + \eta\,;\\
L\,(\|\varphi_t\| + \|\varphi_{x^i}\|) + \|\varphi\|\,(|L_t| + |L_{x^i}|\,)\,\|u\|^{\mu} \leq \gamma\, L^{\beta} + \eta\,;\\
\|\varphi_t\| + \|\varphi_{x^i}\| + |L_t| + |L_{x^i}| \leq \gamma\, L^{\beta'} + \eta\,, \qquad \beta' < 1.
\end{gathered}$$

É fácil compreender porque (H3) resulta de qualquer uma destas condições. Basta notar que

$$\|L\,\varphi_t - L_t\,\varphi\| + \|L\,\varphi_{x^i} - L_{x^i}\,\varphi\| \leq L\,(\|\varphi_t\| + \|\varphi_{x^i}\|) + \|\varphi\|\,(|L_t| + |L_{x^i}|\,)\,;$$

e que $0 \geq \max\{\beta - 2,\, -2\}$.

Observação 96 *Usando a técnica de convexificação do segundo membro de um sistema de controlo (* sliding modes*), técnica esta introduzida por Gamkrelidze em 1962 (* vide *[109, 110, 112]), é possível reduzir um problema de controlo óptimo, com dinâmica genérica, a um problema com dinâmica afim de controlo. A relação entre os pares admissíveis estado-controlo dos problemas originais e convexificado é bem conhecida (* vide *v.g. [111, Ch. 2], [207, pp. 263–270], [51, §2 e Lec. 5], [307, Ch. 6 da Parte I e Ch. 3 da Parte II], [52, §1.14], [56]). A relação entre as extremais de Pontryagin dos dois problemas é um dos nossos presentes tópicos de investigação. Estamos convencidos que desta relação advirá uma generalização natural do resultado do Teorema 92 para o problema de Lagrange com dinâmica não linear no controlo. Este e outros assuntos serão abordados em trabalho futuro (cf. Conclusão a partir da pág. 115).*

Observação 97 *A condição de coercividade (H2), conjuntamente com a convexidade do Lagrangeano* $L(t, x, u)$ *em relação a* u*, são os requisitos clássicos que garantem a existência de solução para o problema* (P_{afim})*. A convexidade não é, no entanto, necessária no Teorema 92, para o estabelecimento da regularidade Lipschitziana das trajectórias minimizantes. Este facto contrasta com as abordagens prévias à regularidade Lipschitziana, onde a convexidade da função* $L(t, x, \cdot)$ *tem aí um papel preponderante (cf. v.g. [69, 72, 71, 11]). A ausência de convexidade no nosso resultado é importante, pois a existência de minimizantes* *para problemas não convexos é hoje um assunto extensamente estudado e uma questão de grande interesse (*vide *v.g. [169, §5], [191, 108, 180, 183]).*

Recordamos que em toda a Secção 6.2.1 a notação $\varphi(t,x,u)$ significa $f(t,x)+g(t,x)\cdot u$. Antes de avançarmos com a demonstração do Teorema 92 vamos mostrar que a condição de regularidade (H3) é fruto da aplicabilidade do princípio do máximo de Pontryagin ao problema compactificado (2.11)–(2.13).

Proposição 98 *As condições (H2) e (H3) do Teorema 92, sobre as funções* $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ *e* $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *que definem o problema* (P_{afim})*, garantem a aplicação do Teorema 17 ao problema compactificado* (2.11)–(2.13) *que lhe é equivalente.*

Demonstração. As funções $\phi(\cdot,\cdot,\cdot)$ e $h(\cdot,\cdot,\cdot)$ do sistema de controlo (2.12) são contínuas em

$$\{(t,z,w) : t\in[a,b]\,,\ z\in\mathbb{R}^n\,,\ w\in S^r\}\ .$$

Para aplicarmos o princípio do máximo de Pontryagin ao problema (2.11)–(2.13), necessitamos de assegurar que o segundo membro de (2.12) é diferenciável com continuidade em relação às variáveis de estado t e z (cf. v.g. [199, 111]). Uma vez que $L(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f(\cdot,\cdot)$, e $g(\cdot,\cdot)$ são de classe C^1; $L(t,x,u)>0$ para todo o (t,x,u) e $\pi(\cdot)$ é contínua; então podemos concluir imediatamente que $\phi_{z^i}(t,z,w)$, $\phi_t(t,z,w)$, $h_{z^i}(t,z,w)$ e $h_t(t,z,w)$ são contínuas para $w\neq\hat{w}$. O único problema é a diferenciabilidade com continuidade em $\hat{w}$ (no pólo norte). Uma vez que $\phi(\cdot,\cdot,\hat{w})\equiv 0$ e $h(\cdot,\cdot,\hat{w})\equiv 0$, temos que (no que se segue, quando nada for indicado, subentende-se que L e φ são calculadas em $(t,z,\pi(w))$)

$$\phi_{z^i}(t,z,w)=\begin{cases} -\dfrac{L_{x^i}(t,z,\pi(w))}{L^2(t,z,\pi(w))} & \text{se}\quad w\neq\hat{w}\\ 0 & \text{se}\quad w=\hat{w}\end{cases}\,,\ i=1,\ldots,n\,,$$

$$h_{z^i}(t,\,z,\,w)=\begin{cases} \dfrac{L\,\varphi_{x^i}-L_{x^i}\,\varphi}{L^2} & \text{se}\quad w\neq\hat{w}\\ 0 & \text{se}\quad w=\hat{w}\end{cases}\,,\ i=1,\ldots,n\,,$$

$$\phi_t(t,z,w)=\begin{cases} -\dfrac{L_t(t,z,\pi(w))}{L^2(t,z,\pi(w))} & \text{se}\quad w\neq\hat{w}\\ 0 & \text{se}\quad w=\hat{w}\end{cases}\,,$$

$$h_t(t,z,w)=\begin{cases} \dfrac{L\,\varphi_t-L_t\,\varphi}{L^2} & \text{se}\quad w\neq\hat{w}\\ 0 & \text{se}\quad w=\hat{w}\end{cases}\,.$$

Para se confirmar a continuidade das derivadas em $\hat{w}$, temos que assegurar que para todo o $(t_0,z_0)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n$

$$\lim_{\rho((t,z,w),\,(t_0,z_0,\hat{w}))\to 0}\frac{L_{x^i}(t,z,\pi(w))}{L^2(t,z,\pi(w))}=0\,, \tag{6.2}$$

$$\lim_{\rho((t,z,w),\,(t_0,z_0,\hat{w}))\to 0} \frac{L_t\,(t,z,\pi(w))}{L^2\,(t,z,\pi(w))} = 0\,, \tag{6.3}$$

$$\lim_{\rho((t,z,w),\,(t_0,z_0,\hat{w}))\to 0} \frac{\|L\,\varphi_{x^i} - L_{x^i}\,\varphi\|}{L^2} = 0\,, \tag{6.4}$$

$$\lim_{\rho((t,z,w),\,(t_0,z_0,\hat{w}))\to 0} \frac{\|L\,\varphi_t - L_t\,\varphi\|}{L^2} = 0\,, \tag{6.5}$$

onde $\rho\,(\cdot,\cdot)$ é uma distância definida sobre $[a,b]\times\mathbb{R}^n\times S^r$. Queremos mostrar que (6.2), (6.3), (6.4) e (6.5) são verdadeiras sob as nossas hipóteses. Deixemos $N\,(t,z,\pi(w))$ simbolizar qualquer um dos numeradores em (6.2)–(6.5). A partir da condição de crescimento (H3), obtemos que, para todo o $t\in[a,b]$, $x\in\mathbb{R}^n$ e $u\in\mathbb{R}^r$,

$$\|N\,(t,x,u)\| \leq \gamma\,L^{\beta}\,(t,x,u)\;\|u\|^{-\mu} + \eta\;\|u\|^{-\mu}\;.$$

Contanto que $2-\beta>0$, concluímos que

$$\frac{\|N\,(t,z,\pi(w))\|}{L^2\,(t,z,\pi(w))} \leq \gamma\,\frac{\|\pi(w)\|^{-\mu}}{L^{2-\beta}\,(t,z,\pi(w))} + \eta\,\frac{\|\pi(w)\|^{-\mu}}{L^2\,(t,z,\pi(w))}\,.$$

Uma vez que por (H2) $\dfrac{1}{L\,(t,z,\pi(w))} \leq \dfrac{1}{\theta\,(\|\pi(w)\|)}$, então

$$\frac{\|N\,(t,z,\pi(w))\|}{L^2\,(t,z,\pi(w))} \leq \gamma\,\frac{\|\pi(w)\|^{-\mu}}{\theta^{2-\beta}\,(\|\pi(w)\|)} + \eta\,\frac{\|\pi(w)\|^{-\mu}}{\theta^{2}\,(\|\pi(w)\|)}\,.$$

Se nos lembrarmos que

$$\lim_{\|\pi(w)\|\to+\infty} \frac{\|\pi(w)\|}{\theta\,(\|\pi(w)\|)} = 0\,,$$

$-\mu \leq 2-\beta \,\wedge\, -\mu\leq 2 \,\wedge\, 2-\beta>0$, então obtemos

$$\lim_{\rho((t,z,w),\,(t_0,z_0,\hat{w}))\to 0} \frac{\|N\,(t,z,\pi(w))\|}{L^2\,(t,z,\pi(w))} = 0\,,$$

o que prova as igualdades (6.2), (6.3), (6.4) e (6.5). ■

Dada a relação existente entre os problemas original e transformado, a pretendida conclusão de regularidade Lipschitziana das trajectórias minimizantes de (P_{afim}) é consequência da aplicação do princípio do máximo de Pontryagin ao problema compactificado (2.11)–(2.13) que lhe é equivalente. Seja $(\tilde{x}\,(\cdot)\,,\tilde{u}\,(\cdot))$ um minimizante do problema original (P_{afim}) e $\left(\tilde{t}\,(\cdot)\,,\tilde{z}\,(\cdot)\,,\tilde{w}\,(\cdot)\right)$ o correspondente minimizante para o problema de tempo mínimo (2.11)–(2.13) com $\tilde{w}\,(\tau)\neq\hat{w}$ em quase toda a parte (*vide* Proposição 10). Pela Proposição 98 estamos em condições de aplicar o princípio do máximo de Pontryagin ao problema de tempo mínimo (2.11)–(2.13): existem funções absolutamente contínuas em $[0, \tilde{T}]$[1]

$$\tilde{p_t} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \tilde{p_z} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

e uma constante $p_0 \leq 0$, não todas nulas em simultâneo, satisfazendo o sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} p_t'(\tau) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\left(t(\tau), z(\tau), w(\tau), p_t(\tau), p_z(\tau)\right) \\ p_z'(\tau) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\left(t(\tau), z(\tau), w(\tau), p_t(\tau), p_z(\tau)\right) \end{cases}$$

com o Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(t, z, w, p_0, p_t, p_z) = p_0 + p_t\,\phi(t, z, w) + p_z \cdot h(t, z, w)\ ;$$

e a condição de máximo

$$0 \leq c = -p_0 = \sup_{w \in S^r} \left\{\tilde{p_t}(\tau)\,\phi\left(\tilde{t}(\tau), \tilde{z}(\tau), w\right) + \tilde{p_z}(\tau) \cdot h\left(\tilde{t}(\tau), \tilde{z}(\tau), w\right)\right\} \tag{6.6}$$

$$\overset{q.t.p.}{=} \tilde{p_t}(\tau)\ \phi\left(\tilde{t}(\tau), \tilde{z}(\tau), \tilde{w}(\tau)\right) + \tilde{p_z}(\tau) \cdot h\left(\tilde{t}(\tau), \tilde{z}(\tau), \tilde{w}(\tau)\right)\,, \tag{6.7}$$

onde c é uma constante não negativa, $\tilde{z}(\tau) = \tilde{x}\left(\tilde{t}(\tau)\right)$ e $\tilde{w}(\tau) = \pi^{-1}\left(\tilde{u}(\tilde{t}(\tau))\right)$.

Dada a relação estabelecida no Capítulo 4 entre as extremais do problema (P) e as do seu transformado à Gamkrelidze, é de esperar que $c = 0$ só seja uma possibilidade se $\tilde{u}(\cdot)$ for um controlo extremal anormal. Tendo em conta que no Teorema 92 o caso anormal é posto de parte, vamos provar que sob as hipóteses do teorema c é estritamente positivo. Recordamos que

$$\phi(t, z, w) = \frac{1}{L\left(t, z, \pi(w)\right)}\,, \quad h(t, z, w) = \frac{\varphi\left(t, z, \pi(w)\right)}{L\left(t, z, \pi(w)\right)}$$

em quase toda a parte. Se $c = 0$, então (6.6) implica (após a substituição $v = \pi(w)$) que

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^r} \left\{\frac{\tilde{p_t}(\tau) + \tilde{p_z}(\tau) \cdot f\left(\tilde{t}(\tau), \tilde{z}(\tau)\right) + \tilde{p_z}(\tau) \cdot g\left(\tilde{t}(\tau), \tilde{z}(\tau)\right) \cdot v}{L\left(\tilde{t}(\tau), \tilde{z}(\tau), v\right)}\right\}$$

se anula para quase todos os $\tau \in \left[0, \tilde{T}\right]$. Isto, obviamente, implica que

$$\tilde{p_z}(\tau) \cdot g\left(\tilde{t}(\tau), \tilde{z}(\tau)\right) \equiv 0\,. \tag{6.8}$$

[1] $\tilde{T}$ denota o tempo mínimo para o problema (2.11)–(2.13).

Paralelamente, uma vez que L é estritamente positivo, $\tilde{p_t}(\tau)+\tilde{p_z}(\tau)\cdot f\left(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau)\right)$ deve ser não positivo. Deste modo, já que a um valor finito para v corresponde um valor finito para $L\left(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau),v\right)$, somos levados a concluir que

$$\tilde{p_t}(\tau)+\tilde{p_z}(\tau)\cdot f\left(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau)\right)=0 \quad q.t.p. \tag{6.9}$$

A proposição seguinte diz-nos que (6.8) e (6.9) implicam que $\tilde{u}(\cdot)$ é um controlo extremal anormal para (P_{afim}).

Proposição 99 *Ao verificarem-se as igualdades* (6.8) *e* (6.9) *resulta que o quaterno*

$$\left(\tilde{x}(\cdot),\tilde{u}(\cdot),\tilde{\psi}_0,\tilde{\psi}(\cdot)\right)=\left(\tilde{z}(\tilde{\tau}(\cdot)),\tilde{v}(\tilde{\tau}(\cdot)),0,\tilde{p_z}(\tilde{\tau}(\cdot))\right),$$

onde $\tilde{\tau}(\cdot)$ é a função inversa de $\tilde{t}(\cdot)$, é uma extremal anormal para o problema (P_{afim}).

Demonstração. O respectivo Hamiltoniano para o problema (2.11)–(2.13) iguala

$$\mathcal{H}(t,z,v,p_t,p_z)=\frac{p_t+p_z\cdot f(t,z)+p_z\cdot g(t,z)\cdot v}{L(t,z,v)}.$$

Temos que verificar as condições (i) e (ii) do Teorema 17 para o quaterno $\left(\tilde{x}(\cdot),\tilde{u}(\cdot),0,\tilde{\psi}(\cdot)\right)$ definido na formulação da Proposição. Introduzamos o Hamiltoniano anormal

$$\overline{H}=\psi\cdot f(t,x)+\psi\cdot g(t,x)\cdot u\,.$$

Cálculos directos mostram que

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\tilde{z}(\tilde{\tau}(t))\right\}=\dot{\tilde{\tau}}(t)\ \tilde{z}'(\tilde{\tau}(t))\,;\\ \tilde{z}'(\tilde{\tau}(t))&=\frac{f(t,\tilde{x}(t))+g(t,\tilde{x}(t))\cdot\tilde{u}(t)}{L(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))}\,;\\ \dot{\tilde{\tau}}(t)&=L(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))\end{aligned}$$

e por conseguinte $\dot{\tilde{x}}(t)=f(t,\tilde{x}(t))+g(t,\tilde{x}(t))\cdot\tilde{u}(t)$. Também

$$\dot{\tilde{\psi}}^i(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{p_z^i}(\tilde{\tau}(t))=\dot{\tilde{\tau}}(t)\ \tilde{p_z^i}'(\tilde{\tau}(t))\,.$$

Resulta claro que $\tilde{\psi}(\cdot)$ é absolutamente contínua, já que a composição da função absolutamente contínua $\tilde{p_z}(\cdot)$ com a função absolutamente contínua e monótona $\tilde{\tau}(\cdot)$. Para todo o

$i = 1, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
\tilde{p_z^i}'(\tau) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z^i} = &-\frac{\tilde{p_z}(\tau)\cdot f_{x^i}\big(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau)\big)+\tilde{p_z}(\tau)\cdot g_{x^i}\big(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau)\big)\cdot\tilde{v}(\tau)}{L\big(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau),\tilde{v}(\tau)\big)} \\
&+\frac{\big(p_t(\tau)+\tilde{p_z}(\tau)\cdot f\big(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau)\big)+\tilde{p_z}(\tau)\cdot g\big(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau)\big)\cdot\tilde{v}(\tau)\big)\,L_{x^i}\big(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau),\tilde{v}(\tau)\big)}{L^2\big(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau),\tilde{v}(\tau)\big)}.
\end{aligned}
$$

O segundo termo da adição anula-se em virtude de (6.8)–(6.9) e, por isso,

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\psi}}^i(t) &= -\tilde{\psi}(t)\cdot f_{x^i}(t,\tilde{x}(t)) - \tilde{\psi}(t)\cdot g_{x^i}(t,\tilde{x}(t))\cdot\tilde{u}(t) \\
&= -\frac{\partial \overline{H}}{\partial x^i},
\end{aligned}
$$

de modo a que (3.3) é satisfeito. Por outro lado,

$$
\tilde{\psi}(t)\cdot g(t,\tilde{x}(t))\cdot u(t) = \tilde{p_z}(\tilde{\tau}(t))\cdot g(t,\tilde{z}(\tilde{\tau}(t)))\cdot u(t) \equiv 0\,,
$$

e portanto

$$
\tilde{\psi}(t)\cdot f(t,\tilde{x}(t)) + \tilde{\psi}(t)\cdot g(t,\tilde{x}(t))\cdot u(t) = \tilde{\psi}(t)\cdot f(t,\tilde{x}(t))
$$

não depende de u, de modo que a condição de máximo (3.4) é satisfeita trivialmente (ou anormalmente). ■

Demonstrámos que a um c nulo corresponde um controlo extremal anormal para o problema (P_{afim}). Desta forma, para controlos minimizantes que não são controlos extremais anormais, temos $c > 0$. Estamos agora em condições de proceder à demonstração do nosso teorema de regularidade.

Demonstração. (*Teorema 92.*) De (6.6) obtemos

$$
\begin{aligned}
0 < c \overset{q.t.p.}{=} &\frac{\tilde{p_t}(\tau)+\tilde{p_z}(\tau)\cdot\varphi\big(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau),\tilde{v}(\tau)\big)}{L\big(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau),\tilde{v}(\tau)\big)} \\
&\Rightarrow L\big(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau),\tilde{v}(\tau)\big) = c^{-1}\big(\tilde{p_t}(\tau)+\tilde{p_z}(\tau)\cdot\varphi\big(\tilde{t}(\tau),\tilde{z}(\tau),\tilde{v}(\tau)\big)\big)\,.
\end{aligned}
$$

Façamos

$$
|\tilde{p_t}(\tau)| \le M \quad \text{e} \quad \|\tilde{p_z}(\tau)\| \le M \text{ em } \big[0,\tilde{T}\big]\,.
$$

Então, para um qualquer $\tau \in \big[0,\,\tilde{T}\big]$ fixo,

$$
L\big(\tilde{t}(\tau),\,\tilde{z}(\tau),\,\tilde{v}(\tau)\big) \le c^{-1}M\,\big(1+\big\|\varphi\big(\tilde{t}(\tau),\,\tilde{z}(\tau),\,\tilde{v}(\tau)\big)\big\|\big)
$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned}\frac{\theta\left(\|\tilde{v}(\tau)\|\right)}{\left\|\varphi\left(\tilde{t}(\tau),\, \tilde{z}(\tau),\, \tilde{v}(\tau)\right)\right\|} &\le \frac{L\left(\tilde{t}(\tau),\, \tilde{z}(\tau),\, \tilde{v}(\tau)\right)}{\left\|\varphi\left(\tilde{t}(\tau),\, \tilde{z}(\tau),\, \tilde{v}(\tau)\right)\right\|} \\ &\le c^{-1} M\, \frac{1+\left\|\varphi\left(\tilde{t}(\tau),\, \tilde{z}(\tau),\, \tilde{v}(\tau)\right)\right\|}{\left\|\varphi\left(\tilde{t}(\tau),\, \tilde{z}(\tau),\, \tilde{v}(\tau)\right)\right\|} \end{aligned} \tag{6.10}$$

para quase todos os $\tau \in \left[0, \tilde{T}\right]$. O último termo desta desigualdade pode ser majorado por $2\, c^{-1}\, M$ se $\left\|\varphi\left(\tilde{t}(\tau), \tilde{z}(\tau), \tilde{v}(\tau)\right)\right\| \ge 1$. Da condição de crescimento (H2) (coercividade) e do facto de $g\,(t, x)$ ter característica de coluna completa, segue-se que $\lim_{\|u\| \to +\infty} \|\varphi\,(t, x, u)\| = +\infty$. Resulta então, da linearidade de $\varphi\,(t, x, u)$ em relação a u, que

$$\lim_{\|\tilde{v}(\tau)\| \to +\infty} \frac{\theta\left(\|\tilde{v}(\tau)\|\right)}{\left\|\varphi\left(\tilde{t}(\tau),\, \tilde{z}(\tau),\, \tilde{v}(\tau)\right)\right\|} = +\infty$$

e, consequentemente, podemos encontrar r_0 tal que, $\forall\, r \ge r_0$,

$$\left\|\varphi\left(\tilde{t}(\tau),\, \tilde{z}(\tau),\, r\right)\right\| \ge 1 \quad \text{e} \quad \frac{\theta\,(r)}{\left\|\varphi\left(\tilde{t}(\tau),\, \tilde{z}(\tau),\, r\right)\right\|} \ge 2\, c^{-1}\, M\,.$$

Por conseguinte, para (6.10) ser satisfeita, deverá acontecer

$$\|\tilde{v}(\tau)\| \le r_0\,.$$

A demonstração está completa: $\tilde{v}\,(\cdot) = \pi\,(\tilde{w}\,(\cdot))$ é essencialmente limitado (por r_0) em $\left[0, \tilde{T}\right]$, isto é, $\tilde{u}\,(\cdot) = \tilde{v}\,(\tilde{\tau}\,(\cdot))$ é essencialmente limitado em $[a, b]$. *Quod erat demonstrandum.* ■

6.2.2 Problemas do cálculo das variações

Como vimos no Capítulo 1, os problemas do cálculo das variações são casos particulares do problema de controlo óptimo (P_{afim}). Nesta secção vamos mostrar que o resultado do Teorema 92 oferece, mesmo neste contexto muito particular, novas condições de regularidade Lipschitziana.

Problema fundamental do cálculo das variações

O resultado que se segue é um corolário imediato do Teorema 92.

Teorema 100 *Seja $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ uma função diferenciável com continuidade em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; a, $b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$; e x_a, $x_b \in \mathbb{R}^n$. Consideremos o problema fundamental do cálculo das* *variações:*

$$I[x(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t \longrightarrow \min \tag{6.11}$$
$$x(a) = x_a\,, \quad x(b) = x_b\,.$$

Sob as hipóteses:

Coercividade: *há uma função* $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$L(t, x, u) \geq \theta(\|u\|) > \zeta\,, \quad \zeta \in \mathbb{R}\,,$$

para todo o $(t, x, u) \in \mathbb{R}^{1+n+n}$, *e*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{r}{\theta(r)} = 0\,;$$

Condição de regularidade: *existem constantes* γ, β, η *e* μ, *com* $\gamma > 0$, $\beta < 2$ *e* $\mu \geq \max\{\beta - 1, -1\}$, *tais que para todo o* $t \in [a, b]$, *e* x, $u \in \mathbb{R}^n$

$$\left(|L_t(t, x, u)| + |L_{x^i}(t, x, u)|\right) \|u\|^{\mu} \leq \gamma\, L^{\beta}(t, x, u) + \eta\,,$$
$$i \in \{1, \ldots, n\}\,;$$

qualquer minimizante do problema (6.11), *na classe das funções absolutamente contínuas, é* Lipschitziano *em* $[a, b]$.

Observação 101 *Não existem extremais anormais para o problema fundamental do cálculo das variações.*

Vamos fornecer um exemplo (Exemplo 104) que mostra que o resultado de regularidade Lipschitziana do Teorema 100 não é coberto pelas condições de regularidade prévias de que temos conhecimento. Em primeiro lugar formulamos o célebre teorema da existência de Tonelli para o problema fundamental do cálculo das variações e compilamos os principais resultados de regularidade encontrados na literatura.

Teorema 102 (Teorema da existência de Tonelli) *Se o Lagrangeano* $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ *for de classe* C^2 *e as condições seguintes forem satisfeitas:*

(T1) $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ *é coercivo, i.e., existem constantes* a, $b > 0$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$L(t, x, v) \geq a\,|v|^{1+b} + c\,, \qquad \textit{para todo o } (t, x, v)\,;$$

(T2) $L_{vv}(t,x,v) \geq 0$ *para todo o* (t,x,v)*;*

então existe uma solução para (6.11) *na classe das funções absolutamente contínuas.*

Os seguintes resultados de regularidade são devidos a F. H. Clarke e R. B. Vinter (*vide* [69, 61]) e são demonstrados sob hipóteses mais fracas do que aquelas que estamos aqui a considerar. Especificamente, elas são válidas quando L é não-suave. Uma vez que a "não suavidade" não é um fenómeno sob estudo neste trabalho, restringi-mo-nos ao caso diferenciável.

Teorema 103 (Resultados prévios de regularidade) *Permitamos que* $L(\cdot,\cdot,\cdot)$*, em adição às hipóteses do Teorema da existência de Tonelli, satisfaça qualquer uma das condições* $(C1)$*,* $(C2)$*,(C3),(C4) ou* $(C5)$*:*

$(C1)$ *o Lagrangeano é autónomo (i.e., não depende de t);*

$(C2)$ *há* $k_0 \in \mathbb{R}$ *e* $k_1(\cdot)$ *integrável tais que,* $\forall (t,x,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$|L_t(t,x,v)| \leq k_0\ |L(t,x,v)| + k_1(t)\ ;$$

$(C3)$ *existem* $k_0 \in \mathbb{R}$ *e* $k_1(\cdot)$, $k_2(\cdot)$ *integráveis tais que,* $\forall (t,x,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\|L_x(t,x,v)\| \leq k_0\ |L(t,x,v)| + k_1(t)\ \|L_v(t,x,v)\| + k_2(t)\ ;$$

$(C4)$ *para cada t fixo, a função* $(x,v) \to L(t,x,v)$ *é convexa;*

$(C5)$ $L_{vv}(t,x,v) > 0$ *e existe uma constante* k_0 *tal que,* $\forall\ (t,x,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\left\|L_{vv}^{-1}(t,x,v)\ (L_x(t,x,v) - L_{vt}(t,x,v) - L_{vx}(t,x,v)\ v)\right\| \leq k_0\ \left(\|v\|^{2+b} + 1\right)\ ,$$

onde b é a constante positiva que aparece na condição de coercividade (T1) do Teorema da existência de Tonelli.

Então, todos os minimizantes do problema fundamental do cálculo das variações (6.11) *são Lipschitzianos.*

Notamos que $(C1)$ é um caso particular da condição de regularidade $(C2)$. As condições de crescimento $(C3)$ e $(C5)$ são generalizações das condições clássicas obtidas respectivamente por Tonelli-Morrey e Bernstein (*loc. cit.*).

Agora mostramos um exemplo de uma funcional que possui minimizante, de acordo com o Teorema da existência de Tonelli, para o qual nenhuma das condições de regularidade (C1)–(C5) é aplicável, enquanto o nosso Teorema 100 é conclusivo.

Exemplo 104 *Consideremos o seguinte problema ($n = 1$):*

$$I[x(\cdot)] = \int_0^1 \left[\left(\dot{x}^4 + 1\right)^3 e^{\left(\dot{x}^4+1\right)\left(t+\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)} \right] dt \longrightarrow \min \tag{6.12}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1 .$$

Exprimindo $L(t,x,v) = \left(v^4+1\right)^3 \mathrm{e}^{\left(v^4+1\right)\left(t+\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}$, *concluímos que*

$$\begin{aligned} L_{vv}(t,x,v) = \Bigg[& \frac{132v^6+36v^2}{\left(v^4+1\right)^2} + \left(\frac{96v^6}{v^4+1} + 12v^2\right)\left(t + \frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \\ & +16v^6 \left(t + \frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^2 \Bigg] L(t,x,v) \, . \end{aligned}$$

O Teorema de Tonelli (Teorema 102) garante a existência de um minimizante $\hat{x}(\cdot) \in W_{1,1}$ *para o problema* (6.12) *já que:*

- $L(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^2$;
- *Para todo o* $(t,x,v) \in [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *temos:*

$$L(t,x,v) > \left(v^4+1\right)^3 \geq v^4 + 1 > 0 \, ;$$

- $L_{vv}(t,x,v) \geq 0$.

Os pressupostos do Teorema 100 são também aferidos com $\theta(r) = r^4 + 1$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\gamma = 2$ *e* $\eta = 0$. *Com efeito,*

$$\begin{aligned} L_t(t,x,v) &= \left(v^4+1\right) L(t,x,v) \, , \\ L_x(t,x,v) &= -\frac{v^4+1}{1+x^2} L(t,x,v) \, , \\ \left(|L_x(t,x,v)| + |L_t(t,x,v)|\right) |v|^{1/2} &\leq 2 \left(|v|^4\right)^{1/8} \left(v^4+1\right) L(t,x,v) \\ &< 2 \left(v^4+1\right)^{9/8} L(t,x,v) \\ &= 2 \left(v^4+1\right)^{33/8} e^{\left(v^4+1\right)\left(t+\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)} \\ &< 2 \left(v^4+1\right)^{36/8} e^{3/2\left(v^4+1\right)\left(t+\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)} \\ &= 2 L^{3/2}(t,x,v) \, . \end{aligned}$$

O nosso Teorema 100 garante, então, que todos os minimizantes desta funcional são Lipschitzianos.

Como veremos agora, nenhuma das condições $(C1) - (C5)$ *é aplicável a este exemplo:*

1. *O Lagrangeano depende explicitamente de t e desta forma a condição $(C1)$ falha.*

2. *Se $(C2)$ fosse verdadeira, poderíamos concluir que* $\dfrac{L_t(t,x,v)}{L(t,x,v)} \le k_0 + \dfrac{k_1(t)}{L(t,x,v)}$, *o que no nosso caso implica*
$$v^4 + 1 \le k_0 + \frac{k_1(t)}{L(t,x,v)},$$
uma desigualdade que falha para v suficientemente grande.

3. *Para $(C3)$ ser verdadeira, deveríamos ter para $v > 0$, $x = 0$ e algum t*
$$\frac{|L_x(t,0,v)|}{v^{7/2}\, L(t,0,v)} \le \frac{k_0}{v^{7/2}} + k_1(t)\, \frac{|L_v(t,0,v)|}{v^{7/2}\, L(t,0,v)} + \frac{k_2(t)}{v^{7/2}\, L(t,0,v)}. \tag{6.13}$$
Uma vez que
$$L_v(t,x,v) = \left[\frac{12\, v^3}{v^4+1} + 4v^3 \left(t + \frac{\pi}{2} - \arctan x\right)\right] L(t,x,v),$$
obtemos da desigualdade (6.13) *que*
$$\frac{v^4+1}{v^{7/2}} \le \frac{k_0}{v^{7/2}} + k_1(t)\, \frac{\frac{12\, v^3}{v^4+1} + 4\, v^3 \left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{v^{7/2}} + \frac{k_2(t)}{v^{7/2}\, L(t,0,v)}$$
o que não é verdade para v suficientemente grande.

4. *$(C4)$ não é igualmente satisfeita: se fixarmos t e v obtemos a função $x \longrightarrow C^3\, e^{C\,(B-\arctan x)}$ que não é convexa: a sua segunda derivada iguala*
$$\frac{2\,x + C}{(1+x^2)^2}\, C^4\, e^{C\,(B-\arctan x)}$$
que não tem sinal definido.

5. *Finalmente $(C5)$ falha, uma vez que $L_{vv}(t,x,v) = 0$ por exemplo para $v = 0$.*

Problemas variacionais com derivadas de ordem superior

Consideramos agora o problema do cálculo das variações com derivadas de ordem superior:
$$\int_a^b L\left(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(m)}(t)\right)\, \mathrm{d}t \longrightarrow \min \tag{6.14}$$

$$\begin{array}{cc} x(a) = x_a^0 & x(b) = x_b^0 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(m-1)}(a) = x_a^{m-1} & x^{(m-1)}(b) = x_b^{m-1}\,. \end{array} \tag{6.15}$$

Relembramos que a notação $W_{m,p}$ ($m = 1, \ldots; 1 \leq p \leq \infty$) representa a classe das funções que são absolutamente contínuas, conjuntamente com as suas derivadas até à ordem $m-1$, e que têm m-ésima derivada pertencente a L_p. A existência de minimizantes para o problema (6.14)–(6.15), na classe $W_{m,1}([a,b];\mathbb{R}^n)$, segue-se dos resultados clássicos de existência se impusermos que $L(t, x_0, \ldots, x_m)$ é convexa em relação a x_m (*vide* v.g. [52]). Podemos colocar a questão de saber se cada um dos minimizantes $x(\cdot) \in W_{m,1}$ tem m-ésima derivada essencialmente limitada, i.e., se pertencem a $W_{m,\infty}$. Um estudo da regularidade de ordem superior foi realizado em 1990 por F. H. Clarke e R. B. Vinter (*vide* [72]), tendo sido deduzida uma condição do tipo de Tonelli-Morrey:

$$\|L_{x_i}(t, x_0, \ldots, x_m)\| \leq \gamma\left(|L(t, x_0, \ldots, x_m)| + \|x_m\|\right) + \eta(t)\, r(x_0, \ldots, x_m)\ ,$$

com $i = 0, \ldots, m-1$, γ uma constante, η uma função integrável e r uma função localmente limitada. Também para este caso somos, uma vez mais, capazes de derivar, a partir do Teorema 92, uma condição de regularidade de cariz novo.

Teorema 105 *Desde que para todo o $t \in [a,b]$ e $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ a função $(t, x_0, \ldots, x_m) \to L(t, x_0, \ldots, x_m)$ seja diferenciável com continuidade e as seguintes condições sejam verificadas:*

Coercividade: *existe uma função $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante ζ tais que*

$$L(t, x_0, \ldots, x_m) \geq \theta(\|x_m\|) > \zeta\,,$$
$$\lim_{r \to +\infty} \frac{r}{\theta(r)} = 0\,;$$

Condição de regularidade: *para algumas constantes γ, β, η e μ com $\gamma > 0$, $\beta < 2$ e $\mu \geq \max\{\beta - 1, -1\}$,*

$$\left(|L_t| + \|L_{x_i}\|\right)\|x_m\|^{\mu} \leq \gamma\, L^{\beta} + \eta\,, \qquad i \in \{0, \ldots, m-1\}\ ; \tag{6.16}$$

então todos os minimizantes $\tilde{x}(\cdot) \in W_{m,1}([a,b];\mathbb{R}^n)$ do problema variacional (6.14)–(6.15) *pertencem à classe $W_{m,\infty}([a,b];\mathbb{R}^n)$.*

Observação 106 *Não existem extremais anormais para o problema* (6.14)–(6.15).

Alguns corolários podem ser facilmente derivados.

Corolário 107 *Os minimizantes* $\tilde{x}(\cdot)$ *da funcional*

$$\mathcal{I}[x(\cdot)] = \int_a^b L\left(x^{(m)}(t)\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min,$$
$$x(\cdot) \in W_{m,1}([a,b];\mathbb{R}^n),$$

sob as condições de fronteira (6.15)*, estão contidos no espaço* $W_{m,\infty}([a,b];\mathbb{R}^n)$*, desde que* $L(\cdot)$ *seja diferenciável com continuidade e para todo o* $x_m \in \mathbb{R}^n$ *houverem constantes* $\xi \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha \in]1,+\infty[$ *tais que* $L(x_m) \geq \|x_m\|^\alpha + \xi$*.*

Para $m = 1$ existe, como sabemos, um resultado mais forte do que o do Corolário 107: se $m = 1$ e L for autónomo ($L = L(x,\dot{x})$), coercivo e convexo em $\dot{x}$, então todos os minimizantes do problema fundamental do cálculo das variações pertencem a $W_{1,\infty}$ (condição (C1) do Teorema 103). Este resultado não é, no entanto, generalizável para o caso das funcionais com derivadas de ordem superior $L\left(x,\dot{x},\ldots,x^{(m)}\right)$. Este facto foi primeiro demonstrado em 1997 por A. V. Sarychev (*vide* [215]): o caso autónomo do problema (6.14) pode apresentar não só minimizantes pertencentes a $W_{m,1} \backslash W_{m,\infty}$ mas também exibir o fenómeno de Lavrentiev – o seu ínfimo em $W_{m,1}$ pode ser estritamente menor do que aquele em $W_{m,\infty}$. O Corolário 107, e o Teorema 105, estabelecem condições que excluem essa possibilidade.

6.2.3 Dinâmica não linear

Consideramos, para finalizar, o problema de Lagrange do controlo óptimo na situação geral, com dinâmica não linear genérica:

$$I[x(\cdot),\, u(\cdot)] = \int_a^b L(t,x(t),u(t))\, \mathrm{d}t \longrightarrow \min,$$
$$\left[\begin{array}{l} x(\cdot) \in W_{1,1}([a,b];\mathbb{R}^n),\ u(\cdot) \in L_1([a,b];\mathbb{R}^r) \\ \quad \dot{x}(t) = \varphi(t,x(t),u(t)), \quad q.t.p.\ t \in [a,b]. \end{array}\right. \qquad (P_{gen})$$

Para derivarmos condições seguradoras de que os controlos óptimos $\tilde{u}(\cdot)$ do problema (P_{gen}) sejam essencialmente limitados, $\tilde{u}(\cdot) \in L_\infty$, consideraremos os problemas auxiliares (P_τ) e $(P_\tau[w(\cdot)])$, com $\mathcal{U} = L_1$, introduzidos no Capítulo 2 e hipóteses mais fracas de aplicabilidade do princípio do máximo de Pontryagin (mais fracas do que aquelas encontradas em [199]).

Como já tivemos oportunidade de realçar, o princípio do máximo de Pontryagin constitui o âmago da teoria do controlo óptimo. Desde a sua primeira formulação e demonstração, várias versões têm sido obtidas por enfraquecimento das hipóteses sob as quais ele é válido. Por exemplo, em [199] assume-se que as funções $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ e $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ são contínuas e têm derivadas contínuas em relação às variáveis de estado x: $L(t,\cdot,u)$, $\varphi(t,\cdot,u) \in C^1$. Em vez do pressuposto de continuidade de $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ e $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$, uma versão exigindo somente que as funções $L(\cdot,x,\cdot)$ e $\varphi(\cdot,x,\cdot)$ sejam Borel-mensuráveis pode ser encontrada no livro [26, Cap. 5]. Aí, de modo a se assegurar a aplicabilidade do princípio do máximo, a seguinte condição é imposta: a existência de uma função integrável $\alpha(\cdot)$, definida em $[a,b]$, tal que para todo o $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$

$$\left\| \frac{\partial L}{\partial x}\left(t,x,u(t)\right) \right\| \leq \alpha(t)\,, \tag{6.17}$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\left(t,x,u(t)\right) \right\| \leq \alpha(t)\,, \tag{6.18}$$

$i = 1, \ldots, n$. A existência e integrabilidade de $\alpha(\cdot)$, e a verificação das desigualdades (6.17) e (6.18), são garantidas sob as hipóteses de que L e φ possuem derivadas $\frac{\partial L}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ que são contínuas em (t,x,u), e que $u(\cdot)$ é essencialmente limitado (estas são as hipóteses encontradas em [199]). As seguintes condições de crescimento constituem hipóteses alternativas (*vide* [58, Sec. 4.4 e p. 212]):

$$\left\| \frac{\partial L}{\partial x} \right\| \leq c\,|L| + k\,, \qquad \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right\| \leq c\,|\varphi_i| + k\,, \tag{6.19}$$

onde c e k são constantes, $c > 0$. Tendo em mente as condições de regularidade Lipschitziana para o problema fundamental do cálculo das variações (cf. Teorema 103), rapidamente adivinhamos a ligação entre as condições de aplicabilidade do princípio do máximo e as condições de regularidade Lipschitziana ((6.19) pode ser interpretada como uma generalização da condição de regularidade Lipschitziana clássica de Tonelli-Morrey – cf. e.g. [218]). A ligação entre as condições de aplicabilidade do princípio do máximo clássico de Pontryagin [199] e as condições de regularidade Lipschitziana para problemas do controlo óptimo com dinâmica afim de controlo foi estabelecida na Secção 6.2.1. Aqui, para tratar dinâmicas não lineares genéricas, necessitaremos de aplicar o princípio do máximo sob hipóteses mais fracas do que aquelas encontradas em [199]. A razão encontra-se no facto de que quando fixamos $w(\cdot) \in L_1\left([\tau_a,\tau_b];\, \mathbb{R}^r\right)$, as funções $F(\tau,t,z,v)$ e $f(\tau,t,z,v)$ do problema $(P_\tau[w(\cdot)])$ (cf. pág. 36) não são contínuas em τ mas apenas mensuráveis. As hipóteses (6.19) são adequadas, uma vez que elas podem ser directamente verificadas para um dado problema. Hipóteses mais fracas que (6.17) e (6.18) podem também ser consideradas. A este respeito, melhoramentos importantes são obtidos com o uso da análise não suave. Por exemplo, podemos substituir (6.17) e (6.18) pelas condições mais fracas

$$\left|L\left(t,x_1,u(t)\right) - L\left(t,x_2,u(t)\right)\right| \leq \alpha(t)\left\|x_1 - x_2\right\|\,,$$

$$\left|\varphi_i\left(t,x_1,u(t)\right) - \varphi_i\left(t,x_2,u(t)\right)\right| \leq \alpha(t)\left\|x_1 - x_2\right\|\,,$$

e formular o princípio do máximo de Pontryagin num contexto de não suavidade, em termos de gradientes generalizados (*vide* [57, 58]). A demonstração de versões mais gerais do princípio do máximo, sob hipóteses cada vez mais fracas, é um assunto ainda muito em progresso. Indicamos o recente artigo [236] para os leitores interessados nesta problemática.

Em relação à questão da existência, Filippov [103] foi o autor do primeiro teorema geral de existência para o controlo óptimo (o artigo original [102], em russo, surgiu em 1959). Existe hoje uma literatura extensiva sobre a existência de soluções para problemas do controlo óptimo. O leitor interessado é remetido para o livro [52] para resultados significativos, formulações várias e discussões detalhadas. Segue-se um conjunto de condições, das do tipo de Tonelli [254] (cf. Teorema 102), que garantem a existência de minimizante para o problema (P_{gen}).

Teorema 108 (Teorema da existência de "Tonelli" para (P_{gen})) *O problema (P_{gen}) tem um minimizante $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$, com $\tilde{u}(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{R}^r)$, desde que exista pelo menos um par admissível, as funções $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ e $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ sejam contínuas e as seguintes condições de convexidade e coercividade sejam satisfeitas:*

(convexidade) *As funções $L(t, x, \cdot)$ e $\varphi(t, x, \cdot)$ são convexas para todo o (t, x);*

(coercividade) *Existe uma função $\theta : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, limitada inferiormente, tal que*

$$L(t, x, u) \geq \theta\left(\|\varphi(t, x, u)\|\right) \quad \text{para todo o } (t, x, u); \tag{6.20}$$

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty; \tag{6.21}$$

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \|\varphi(t, x, u)\| = +\infty \quad \text{para todo o } (t, x). \tag{6.22}$$

Observação 109 *Para o problema fundamental do cálculo das variações temos $\varphi = u$ e o Teorema 108 coincide com a versão moderna do Teorema 102.*

Os requerimentos do Teorema da existência 108 não implicam os do princípio do máximo de Pontryagin (qualquer que seja a versão concreta em consideração). Como sabemos, pode acontecer que as condições necessárias de optimalidade sejam válidas enquanto a existência não é garantida; ou pode acontecer que os minimizantes preditos pelo Teorema 108 não sejam extremais de Pontryagin. Seguem os resultados principais da secção.

Teorema 110 *Sob a hipótese de coercividade do Teorema 108, todos os controlos minimizantes $\tilde{u}(\cdot)$ de (P_{gen}), que não são controlos extremais anormais, são essencialmente limitados em $[a, b]$, desde que a aplicabilidade do princípio do máximo ao problema $(P_\tau[\tilde{u}(\cdot)])$ seja assegurada.*

Observação 111 *Tal como no Teorema 92, a convexidade não é requirida no teorema de regularidade 110 (cf. a Observação 97 para a importância deste facto).*

Aplicando as hipóteses (6.19) do princípio do máximo às funções F e f do problema $(P_\tau\,[\tilde{u}(\cdot)])$, o resultado que se segue é trivialmente obtido.

Teorema 112 *Sob a hipótese de coercividade, as condições de crescimento: existem constantes $c > 0$ e k tais que*

$$\left|\frac{\partial L}{\partial t}\right| \leq c\,|L| + k\,, \quad \left\|\frac{\partial L}{\partial x}\right\| \leq c\,|L| + k\,,$$
$$\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\| \leq c\,\|\varphi\| + k\,, \quad \left\|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right\| \leq c\,|\varphi_i| + k \quad (i = 1, \ldots, n)\,;$$

implicam que todos os controlos minimizantes $\tilde{u}(\cdot)$ de (P_{gen}), que não são controlos extremais anormais, são essencialmente limitados em $[a, b]$.

Repare-se que sob as hipóteses do Teorema 112, todos os minimizantes de (P_{gen}) são extremais de Pontryagin e podem, por isso, ser identificados pelo princípio do máximo. Na realidade, podemos dizer mais: que os multiplicadores Hamiltonianos são Lipschitzianos e não apenas absolutamente contínuos.

Teorema 113 *Sob as condições do Teorema 112, todos os minimizantes do problema de Lagrange (P_{gen}) satisfazem o princípio do máximo de Pontryagin com multiplicadores Hamiltonianos Lipschitzianos: $\psi(\cdot) \in W_{1,\infty}$.*

Demonstração. (Teorema 110) Seja $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ um minimizante de (P_{gen}) e consideremos a passagem à forma paramétrica (P_τ) com $\tau_a = a$ e $\tau_b = b$. Das Proposições 16 e 49, dados os pressupostos do teorema, sabemos que existem funções absolutamente contínuas $\tilde{p_t}(\cdot)$ e $\tilde{p_z}(\cdot)$ tais que para quase todos os pontos $\tau \in [a, b]$ e para todo o $v > 0$,

$$v \longmapsto \left[-L\left(\tau, \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau)\right) + \tilde{p_t}(\tau) + \tilde{p_z}(\tau) \cdot \varphi\left(\tau, \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau)\right)\right] v$$

é maximizado em $v = 1$. Isto implica que

$$L\left(\tau, \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau)\right) = \tilde{p_t}(\tau) + \tilde{p_z}(\tau) \cdot \varphi\left(\tau, \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau)\right)\,. \tag{6.23}$$

Façamos $|\tilde{p_t}(\tau)| \leq M$ e $\|\tilde{p_z}(\tau)\| \leq M$ em $[a, b]$. Dividindo ambos os membros da igualdade (6.23) por $\|\varphi\left(\tau, \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau)\right)\|$ e usando a hipótese de coercividade (6.20), obtemos

$$\frac{\theta\left(\|\varphi\left(\tau,\, \tilde{x}(\tau),\, \tilde{u}(\tau)\right)\|\right)}{\|\varphi\left(\tau,\, \tilde{x}(\tau),\, \tilde{u}(\tau)\right)\|} \leq M\, \frac{1 + \|\varphi\left(\tau,\, \tilde{x}(\tau),\, \tilde{u}(\tau)\right)\|}{\|\varphi\left(\tau,\, \tilde{x}(\tau),\, \tilde{u}(\tau)\right)\|}\,.$$

A condição de coercividade (6.21)–(6.22) permite-nos tirar a conclusão pretendida de que $\tilde{u}(\cdot)$ é essencialmente limitado em $[a, b]$. *Quod erat demonstrandum.* ∎

Uma vez que o Teorema 112 considera problemas do controlo óptimo com dinâmica não linear, quer nas variáveis de estado, quer nas variáveis de controlo, muitos exemplos, havendo minimizantes em conformidade com a teoria da existência, podem ser facilmente construídos para os quais o nosso resultado é aplicável enquanto as condições de regularidade Lipschitziana previamente conhecidas, como aquelas em [71] e [217], fracassam. Segue um tal exemplo com $n = r = 2$.

Exemplo 114

$$
\begin{gathered}
\int_0^1 \left(u_1^2(t) + u_2^2(t)\right) \left(\mathrm{e}^{2\,(x_1(t)+x_2(t))} + 1\right) \, \mathrm{d}t \longrightarrow \min \\
\begin{cases}
\dot{x_1}(t) = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} \\
\dot{x_2}(t) = u_2(t)\,\mathrm{e}^{x_1(t)+x_2(t)}
\end{cases} \\
x_1(0) = 0,\ x_1(1) = 1,\ x_2(0) = 1,\ x_2(1) = 1.
\end{gathered}
\tag{6.24}
$$

Para este problema temos:

$$
\begin{aligned}
L(x_1, x_2, u_1, u_2) &= \left(u_1^2 + u_2^2\right) \left(\mathrm{e}^{2\,(x_1+x_2)} + 1\right); \\
\varphi(x_1, x_2, u_1, u_2) &= \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \\ u_2\,\mathrm{e}^{x_1+x_2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Há a garantia de existência de solução para (6.24), se considerarmos

$$
x_1(\cdot)\,, x_2(\cdot) \in W_{1,1}\left([0,\,1];\,\mathbb{R}\right) \ \text{ e } \ u_1(\cdot)\,, u_2(\cdot) \in L_1\left([0,\,1];\,\mathbb{R}\right)\,,
$$

porquanto todas as condições do teorema de existência *à la* Tonelli (Teorema 108) são satisfeitas:

- O quaterno $(x_1(t), x_2(t), u_1(t), u_2(t)) = (t, 1, 1, 0)$ é admissível.

- As funções $L(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ e $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ são contínuas em $\mathbb{R}^4$.

- A função $L(x_1, x_2, \cdot, \cdot)$ é estritamente convexa uma vez que a matriz

$$
\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u} = \begin{bmatrix} 2\left(\mathrm{e}^{2(x_1+x_2)} + 1\right) & 0 \\ 0 & 2\left(\mathrm{e}^{2(x_1+x_2)} + 1\right) \end{bmatrix}
$$

é definida positiva para todos os $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. As matrizes

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u \partial u} = \begin{bmatrix} \frac{u_2^2}{\sqrt{\left(u_1^2+u_2^2\right)^3}} & -\frac{u_1 u_2}{\sqrt{\left(u_1^2+u_2^2\right)^3}} \\ -\frac{u_1 u_2}{\sqrt{\left(u_1^2+u_2^2\right)^3}} & \frac{u_1^2}{\sqrt{\left(u_1^2+u_2^2\right)^3}} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u \partial u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são não negativas e concluímos pela convexidade de $\varphi(x_1, x_2, \cdot, \cdot)$.

- Da desigualdade

$$L = \left(u_1^2 + u_2^2\right) \left(e^{2\,(x_1+x_2)} + 1\right) \geq u_1^2 + u_2^2 + u_2^2 e^{2\,(x_1+x_2)},$$

temos coercividade quadrática ($\theta(r) = r^2$).

As suposições de suavidade sobre os dados do problema são satisfeitas, uma vez que $L(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ e $\varphi(\cdot, \cdot, u_1, u_2)$ são de classe C^∞. O Teorema 112 permito-nos concluir que todos os controlos minimizantes, que não são controlos extremais anormais, são limitados:

- As condições em $\frac{\partial L}{\partial t}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ são trivialmente satisfeitas dado que o problema é autónomo: L e φ não dependem explicitamente da variável tempo.
- As condições de crescimento em $\frac{\partial L}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ são igualmente satisfeitas: $\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2e^{2(x_1+x_2)}\left(u_1^2 + u_2^2\right) \leq 2L$; $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 0$; $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = \varphi_2$.

6.3 Consignação

Neste capítulo estudámos algumas propriedades das trajectórias minimizantes, para problemas intrinsecamente do controlo óptimo, na situação em que os controlos não são restritos (como acontece no cálculo das variações). Obtivémos novas condições que garantem a regularidade Lipschitziana das trajectórias minimizantes para dinâmicas de controlo não lineares. Estas condições resolvem a discrepância entre a optimalidade e a existência, assegurando que os minimizantes preditos pela teoria da existência satisfazem as condições de optimalidade. Paralelamente, fenómenos indesejáveis, como seja o de Lavrentiev, são naturalmente excluídos. Mostrámos que as condições de regularidade Lipschitziana estão relacionadas com as condições de aplicabilidade do princípio do máximo de Pontryagin. Para lidar com dinâmicas afins de controlo, o princípio do máximo de Pontryagin clássico [199] é suficiente (§6.2.1). Para tratar o caso genérico, um princípio do máximo sob hipóteses mais fracas, como aquele que encontramos em [26], é necessário (§6.2.3). A nossa abordagem é baseada na relação entre as extremais do problema original e as de um problema auxiliar (Capítulo 4) e na subsequente utilização do princípio do máximo de Pontryagin sobre o último problema.

A condição de máximo do princípio do máximo de Pontryagin, conjuntamente com o pressuposto de coercividade do teorema da existência, implicam a regularidade Lipschitziana da correspondente trajectória minimizante do problema original. Enquanto que os resultados prévios da literatura eram apenas capazes de lidar com dinâmicas lineares e invariantes no tempo, a nossa abordagem permite-nos trabalhar com dinâmicas genéricas.

Parte dos resultados deste capítulo foram apresentados pelo autor num seminário e em dois encontros nacionais, a saber,

- Em Maio de 1998, *O Princípio do Máximo de Pontryagin e a Regularidade Lipschitziana dos Minimizantes no Cálculo das Variações e Controlo Óptimo*, Dep. de Matemática, Univ. de Coimbra;

- Em Maio de 2000, *Regularidade Lipschitziana, Existência e Condições Necessárias no Controlo Óptimo*, COPO-2000 (Encontro de Matemáticos Portugueses em Controlo), Dep. de Matemática, Univ. de Aveiro;

- Em Maio de 2002, *Tonelli's Full-Regularity in the Calculus of Variations and Optimal Control: Recent Developments*, COPO-2002, Dep. de Matemática, Univ. de Coimbra;

e em quatro conferências internacionais, em Moscovo, Lisboa, Paris e Praga:

- Em Setembro de 1998, *Lipschitzian Regularity of Minimizers in the Calculus of Variations and Optimal Control*, International Conference dedicated to the 90th Anniversary of Lev Semenovich Pontryagin (1908–1988), Steklov Mathematical Institute and Moscow State (Lomonosov) University, Moscow, Russia (*vide* [282]);

- Em Outubro de 1998, *Lipschitzian Regularity Conditions for the Minimizing Trajectories of Optimal Control Problems*, Autumn School on Nonlinear Analysis and Differential Equations (ASDE 98), Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais (CMAF) and University of Lisbon, Lisboa, Portugal (*vide* [218]);

- Em Junho de 2000, *Lipschitzian Regularity of Minimizers for Optimal Control Problems*, Second Nonlinear Control Network (NCN) Workshop, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, France (*vide* [283]);

- Em Agosto de 2001, *Regularity of Minimizers in Optimal Control*, EQUADIFF 10, The Czechoslovak International Conference on Differential Equations and Their Applications, Prague, Czech Repuplic (*vide* [276]).

Dois artigos, com *reviews* no *Zentralblatt für Mathematik* e nas *Mathematical Reviews*, encontram-se publicados em [217, 218]. Resultados preliminares da Secção 6.2.3 estão publicados em [276]. Os resultados do capítulo, ainda não publicados, estão submetidos à revista internacional *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS)* [279].

Uma sinopse de 24 páginas dos principais resultados desta tese, intitulada *Carathéodory--Equivalence, Noether Theorems, and Tonelli Full-Regularity in the Calculus of Variations and Optimal Control* [269], encontra-se disponível como E-Print no `arXiv`,

http://arXiv.org/abs/math/0206230

e foi apresentada pelo autor, como *Invited Lecture*, no *First Junior European Meeting "Control Theory and Stabilization"*, na Universidade de Bourgogne, em Dijon, de 2 a 4 de Outubro de 2002.

"Pasmo sempre que acabo qualquer coisa. Pasmo e desolo-me. O meu instinto de perfeição deveria inibir-me de acabar; deveria inibir-me até de começar. Mas distraio-me e faço. O que consigo é um produto, em mim, não de uma aplicação de vontade, mas de uma cedência dela. Começo porque não tenho força para pensar; acabo porque não tenho alma para suspender."

—Fernando Pessoa

Conclusão

O desejo de perfeição é inerente aos humanos e às leis naturais da física. Inspira e dá intuição a corredores, artistas, criativos, cientistas, matemáticos e a toda a raça humana (cf. [247]). Na Natureza, várias espécies florais apresentam elevado grau de *simetria* – o princípio unificador, como vimos, da grande variedade de leis de conservação. É o caso dos malmequeres, das gerberas e das margaridas, radialmente simétricas. A ideia de simetria ocorre naturalmente ao nosso espírito, sugerindo equilíbrio e proporção, harmonia e beleza, ordem e perfeição, padrão e regularidade! Uma teoria matemática de perfeição (optimização), belíssima, denominada cálculo das variações, foi originada pelos irmãos Bernoulli, Newton, Euler, entre outros, e sistematicamente desenvolvida desde o século XVIII. Foi essa teoria, sob a égide da eterna procura de funções óptimas (soluções perfeitas) e sua análise, e o querer compreender a essência da optimalidade (perfeição), a nossa fonte de atracção, reflexão e desassossego.

Motivados por questões e métodos clássicos do cálculo das variações, uma nascente muito rica em ideias, usámos as terminologias e a lógica mais moderna e elegante, clara e eficiente, do controlo óptimo, proporcionadora, como diz Young [308], de uma *nova liberdade*, caracterizando algumas propriedades dos processos optimizantes. O objectivo principal foi o estudo da regularidade Lipschitziana das trajectórias minimizantes para o problema de Lagrange do controlo óptimo sem restrições nas variáveis de controlo. Este assunto, praticamente ausente na literatura da especialidade, está ligado a dois tópicos, esses muito bem estudados. São eles a existência de trajectórias óptimas e as condições necessárias de optimalidade. A procura de condições necessárias esteve na origem da teoria matemática do controlo óptimo e tem sido perseguida vigorosamente até aos dias de hoje (cf. v.g. [296, 214, 84, 287, 101, 195, 80, 83]). O problema da *existência* é um assunto igualmente estudado desde os anos cinquenta e sessenta, existindo hoje uma teoria vasta sobre o assunto (cf. v.g. [102, 206, 51, 26, 203, 187, 52, 200, 75, 180, 183]). Uma análise cuidadosa das hipóteses dos teoremas de existência e das condições necessárias de optimalidade, revela que existe uma discrepância entre ambas as teorias:

- Para os minimizantes preditos pela teoria da existência as condições necessárias podem não ser válidas;
- Na classe de controlos onde as condições necessárias clássicas são válidas (controlos mensuráveis e limitados) a existência não é, em geral, garantida.

Embora possa parecer uma verdade de Monsieur de la Palisse, importa realçar que não faz sentido assumir a existência de uma solução num problema onde não existe nenhuma. Se calcularmos uma solução na base de tal pressuposto, poderemos concluir, como no paradoxo de Perron, que o maior inteiro positivo N é $N = 1$. A maneira de atacarmos este problema foi o de postular condições, para além das da existência, chamadas *condições de regularidade Lipschitziana*, assegurando que todos os controlos minimizantes são limitados e, por conseguinte, que verificam as condições necessárias de optimalidade.

A abordagem integrada que aqui introduzimos – transformação dos problemas, estudo da relação entre as extremais de Pontryagin, leis de conservação (invariantes) e simetrias – é a pedra angular de toda a dissertação, permitindo uma nova perspectiva sobre a temática das condições de regularidade Lipschitziana. Esta perspectiva veio a revelar-se extremamente efectiva e frutuosa na obtenção de resultados de regularidade Lipschitziana para problemas de controlo óptimo com dinâmica não linear: uma área de investigação que se encontrava totalmente por desenvolver. Os resultados são formulados como condições de crescimento impostas sobre (as derivadas de) L e φ e implicam que os controlos minimizantes $\tilde{u}(\cdot)$ são limitados e que as respectivas trajectórias minimizantes $\tilde{x}(\cdot)$ são Lipschitzianas. Mesmo para situações bem particulares, como sejam os problemas do cálculo das variações com e sem derivadas de ordem superior, os resultados que advêm são novos e capazes de tratar situações anteriormente não consideradas. Com a benevolência do leitor e dando jus aos pareceres dos avaliadores dos trabalhos entretanto publicados em revistas da especialidade, o balanço final que fazemos é positivo e atrevemo-nos a especular que o método proposto fornece um algoritmo de carácter lato para o estabelecimento de resultados de regularidade nos mais diversos contextos. Fazemos nossas as palavras de Constantin Carathéodory abordando o assunto *"The Beginning of Research in the Calculus of Variations"* [45]:

> "I will be glad if I have succeeded in impressing the idea that it is not only pleasant and entertaining to read at times the works of the old mathematical authors, but that this may occasionally be of use for the actual advancement of science."

Porque entendemos que a conclusão de qualquer estudo deve ser mais do que a oportunidade para avaliar as concretizações e os resultados obtidos, devendo traçar vectores que perpassam esses mesmos resultados, vamos dissertar um pouco sobre alguns dos problemas que estão na continuidade do trabalho de investigação desenvolvido nesta tese. É fácil de constatar que as ferramentas que aqui foram desenvolvidas no intuito de se atacar a questão da regularidade, como seja a nossa generalização do teorema de Noether para problemas de controlo óptimo, estão ainda sub-aproveitadas, possuindo o potencial para incursões nesta e noutras áreas. Acreditamos verdadeiramente que o raciocínio exposto é fonte promissora e um bom guia para o esclarecimento de algumas questões ainda em aberto.

Em relação à regularidade Lipschitziana das trajectórias minimizantes, permanece por clarificar a interligação entre a regularidade e a extremalidade anormal. Para os problemas do cálculo das variações estudados em [69] e [72] não existem extremais anormais, enquanto para os problemas de controlo óptimo considerados em [71] e [217] elas são, como no Capítulo 6, colocadas de parte. A questão de *como estabelecer regularidade Lipschitziana para as trajectórias minimizantes anormais* está em aberto. A sua relevância, no âmbito da geometria sub-Riemanniana, foi exposta por J. P. Gauthier em Paris, a 8 de Junho de 2000, no *Second NCN Workshop*. Embora a ocorrência de minimizantes anormais em problemas do cálculo das variações e do controlo óptimo seja um fenómeno ubíquo (*vide* v.g. [33, 16, 154, 177, 233, 8, 155]) e justifique, *per se*, o esclarecimento da questão *supra*, a verdade é que a actividade neste campo tem sido direccionada para a eliminação das extremais anormais, não existindo, como dissemos, qualquer tipo de respostas. O estudo da regularidade Lipschitziana anormal não parece ser fácil, mas algumas respostas parciais são possíveis por intermédio do nosso *modus operandi*. Se considerarmos o problema de Lagrange do controlo óptimo invariante no tempo, com funcional $\int_a^b L\left(x(t),\, u(t)\right) \mathrm{d}t$, dinâmica $\dot{x}(t) = \varphi\left(x(t),\, u(t)\right)$ e controlos, *a priori*, não limitados ($u(t) \in \mathbb{R}^r$), é possível mostrar, usando uma forma paramétrica ligeiramente diferente daquela usada nos Capítulos 5 e 6, que se a dinâmica for homogénea positiva de grau um em relação ao controlo, $\varphi(x, \lambda u) = \lambda\, \varphi(x, u)$ para todo o $\lambda > 0$, então as usuais condições de coercividade e convexidade da teoria da existência implicam que os todos os controlos óptimos, normais e anormais, são essencialmente limitados.

Teorema 115 *Sob as hipóteses do teorema da existência de Tonelli, todos os controlos minimizantes $\tilde{u}(\cdot)$ do problema de Lagrange autónomo com dinâmica homogénea positiva de grau um em u,*

$$\varphi(x, \lambda u) = \lambda \varphi(x, u)\,, \quad \forall\, \lambda > 0\,,$$

são essencialmente limitados em $[a, b]$.

Para o problema fundamental do cálculo das variações ($\dot{x}(t) = u(t)$) a condição de homogeneidade do Teorema 115 é trivialmente satisfeita e o resultado coincide com aquele provado por Clarke e Vinter em [69]: *Sob as hipóteses do Teorema da existência de Tonelli, todos os minimizantes do problema fundamental autónomo do cálculo das variações são Lipschitzianos* (condição ($C1$) do Teorema 103). O Teorema 115 não é capaz, contudo, de incluir problemas autónomos do cálculo das variações com derivadas de ordem superior. Este facto está de acordo com os resultados de Sarychev [215]: os minimizantes de problemas autónomos do cálculo das variações com derivadas de segunda ordem podem não pertencer a $W_{2,\infty}$ sob as hipóteses de existência de Tonelli, podendo, inclusive, apresentar o fenómeno de Lavrentiev $W_{2,1}$–$W_{2,\infty}$. De modo similar ao Teorema 115, é também possível obter respostas para problemas normais e anormais do controlo óptimo quando a dinâmica é invariante no estado. Embora estes resultados de regularidade Lipschitziana cubram problemas do controlo óptimo com dinâmicas não lineares, a condição de homogeneidade parece-nos demasiada restritiva. Resultados mais gerais estão em estudo e aparecerão noutro lugar.

É igualmente interessante a generalização dos métodos desenvolvidos para os problemas do cálculo das variações multidimensionais. Neste contexto as questões de regularidade continuam pertinentes e, não obstante a muita actividade na área (cf. v.g. [160, 159, 50, 95, 118, 182, 1, 224, 49]), muitas respostas estão por dar e muitíssimo mais se encontra por fazer, nomeadamente quando comparamos os resultados aqui disponíveis *versus* os alcançados no cálculo das variações unidimensional: para problemas com integrais múltiplos os problemas são mais difíceis e os resultados referem-se sempre a problemas muito particulares. Algumas conversas e troca de impressões com o Prof. Arrigo Cellina do Departamento de Matemática e Aplicações da Universidade de Milão, Bicocca, mostraram-nos que as comunidades do cálculo das variações uni- e multi-dimensional encontram-se assaz separadas, sendo desejável uma aproximação de ideias e métodos. Se a nossa abordagem do controlo óptimo ao problema da regularidade Lipschitziana foi algo de verdadeiramente original e inaudito, resultando numa experiência muito efectiva, porque não uma abordagem semelhante para problemas multidimensionais? Este é um ponto de vista completamente novo, nunca antes trilhado e na nossa opinião merecedor de atenção. Ainda que o princípio do máximo de Pontryagin não seja válido para o problema multidimensional geral, existem versões do princípio do máximo específicas, como as encontradas em [161, 141, 211, 142, 98], que tornam possível a generalização da nossa abordagem.

Num grande número de aplicações, incluindo a optimização estrutural, transições de fase, compósito de materiais e teoria dos cristais, tópicos de investigação bem activos e que estiveram sob estudo em Junho de 2001 no *CNA Summer School – Multiscale Problems in Nonlinear Analysis*,[2] as soluções são altamente oscilatórias. Os métodos para uma descrição efectiva de

[2]Primeira Escola de Verão do *Center for Nonlinear Analysis, Carnegie Mellon University, Department of*

tais soluções são chamados de *métodos de relaxação* (cf. [298], [299, §2]).[3] Planeia-se também a obtenção de condições de regularidade Lipschitziana para minimizantes generalizados, ditos controlos relaxados ou medidas de Young (cf. v.g. [111, 289, 192, 204, 105, 193]).

Outra direcção importante de investigação está relacionada com o fenómeno de Lavrentiev, quando o ínfimo do problema na classe (não Lipschitziana) de trajectórias com derivada não limitada é estritamente menor do que na classe das funções com derivada limitada. Se escolhermos um problema com o fenómeno de Lavrentiev, por exemplo o de Manià [168] (cf. [263, pp. 88–92]), é possível obter outros problemas com o mesmo fenómeno usando transformações convenientes do problema e os resultados dos Capítulos 2 e 4. Esta ideia aparece de maneira implícita no trabalho [215] do Prof. Andrey Sarychev, onde é feita uma *mudança de tempo* para a síntese do fenómeno de Lavrentiev. Seria interessante obter uma classe de problemas mais abrangente, alargando essa mudança a outras transformações. Mais uma vez, a abordagem parece generalizável a problemas do cálculo das variações multidimensional, onde muitas mais questões se encontram por responder (cf. v.g. [41]). Estas e outras questões, como a ligação do fenómeno de Lavrentiev à extremalidade anormal e aos fenómenos de rigidez e relaxamento (cf. v.g. [307, pp. 218–220], [7, 310, 42, 24]) estão também sob estudo.

Em relação ao nosso teorema de Noether e respectivas leis de conservação, temos mantido cooperação com o Prof. Emmanuel Trélat, do Departamento de Matemática da Universidade de Paris-Sud, Orsay, França, estando planeada a obtenção de leis de conservação para a classe de problemas de controlo óptimo com sistema de controlo afim e com rumo (*drift*). Planeamos depois usar essas leis de conservação para a simplificação das correspondentes equações de Hamilton-Jacobi. Estamos particularmente interessados no estudo das seguintes classes (canónicas) de sistemas de controlo (cf. [286]):

$$
\begin{cases}
\dot{x_1} & = 1 + x_2 \\
\dot{x_2} & = x_3 \\
\dot{x_3} & = x_4 \\
 & \vdots \\
\dot{x}_{n-1} & = u \\
\dot{x_n} & = x_{n-1}^2 + \cdots \text{(forma quadrática com primeiro termo em } x_{n-1}^2\text{)}
\end{cases}
$$

Mathematical Sciences, que se realizou em Pittsburgh, USA, de 31 de Maio a 9 de Junho de 2001, e que o autor teve imenso prazer em ter frequentado.

[3] O termo *relaxação* foi introduzido por Warga [297] em 1962, embora a aceitação do termo seja devida à adopção posterior por McShane [172]. O conceito nasceu, no âmbito do cálculo das variações, em 1933, por Young [303, 304, 305, 306], e no controlo óptimo em 1962, por Gamkrelidze [109, 112].

e

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= 1 + x_n^2 + \cdots \text{(forma quadrática com primeiro termo em } x_n^2) \\ \dot{x_2} &= x_3 \\ \dot{x_3} &= x_4 \\ &\vdots \\ \dot{x_{n-1}} &= x_n \\ \dot{x_n} &= u \end{cases}$$

Especialistas em equações às derivadas parciais em teoria do controlo, disseram-nos que é um bom ponto de vista e uma ideia nova tentar usar leis de conservação no intuito de simplificar as equações de Hamilton-Jacobi.

Parece-nos também viável o uso de simetrias generalizadas (variância fraca, que introduzimos no Capítulo 5) e da nossa versão do Teorema de Noether na obtenção de um resultado geral, no âmbito da geometria sub-Riemanniana, no seguimento da análise das simetrias do sistema de aproximação nilpotente levada a cabo em [5] para o problema concreto dos "rolling bodies".

Outra vertente de pesquisa consiste em extender os argumentos do Capítulo 5 ao segundo teorema de Noether para problemas do controlo óptimo que são invariantes sob simetrias dependentes de k funções arbitrárias da variável independente e suas derivadas até determinada ordem m. O estudo de problemas variacionais invariantes

$$I\left[x(\cdot)\right] = \int_a^b L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min$$

no cálculo das variações foi iniciado na primeira parte do século XX por Emmy Noether que, influenciada pelos trabalhos de Klein e Lie sobre as propriedades de transformação de equações diferenciais sob grupos contínuos de transformações (*vide* v.g. [90, Ch. 2]), publicou no seu prolífico artigo [185, 186] de 1918 dois teoremas fundamentais, agora resultados clássicos e conhecidos como (primeiro) teorema de Noether e segundo teorema de Noether, mostrando que a invariância com respeito a uma família de transformações das variáveis t e x implica a existência de certas quantidades conservadas. Estes resultados, também conhecidos como *teoremas da simetria de Noether*, têm implicações profundas em todas as teorias físicas, explicando a correspondência entre as simetrias dos sistemas e a existência de leis de conservação.[4] Esta interacção notável entre o conceito de invariância no cálculo das variações e a existência de primeiros integrais foi claramente reconhecida por Hilbert [132] (cf. [167]).

[4]A simetria é a família de transformações que actua sobre as variáveis independentes e dependentes do sistema.

O primeiro teorema de Noether estabelece, como sabemos, a existência de ρ primeiros integrais das equações diferenciais de Euler-Lagrange quando o Lagrangeano L é invariante sob uma família de transformações contendo ρ parâmetros. Isto significa que as hipóteses de invariância conduzem a quantidades que são constantes ao longo das extremais de Euler-Lagrange. No Capítulo 5 estabelecemos uma extensão para as extremais de Pontryagin dos problemas de controlo óptimo. Como considerámos uma noção de *quasi-invariância* e as famílias de transformações podem depender igualmente das variáveis de controlo, o resultado é novo mesmo no paradigma clássico do cálculo das variações.

O segundo teorema de Noether estabelece a existência de $k\,(m+1)$ primeiros integrais quando o Lagrangeano é invariante sob uma família contínua de transformações de dimensão infinita que, em vez de dependência sobre parâmetros, como no primeiro teorema, depende de k funções arbitrárias e suas derivadas até à ordem m. O segundo teorema não é tão bem conhecido como o primeiro. Tem, contudo, algumas implicações suficientemente interessantes, como sucede quando consideramos a funcional do problema fundamental do cálculo das variações no caso autónomo:

$$I\,[x(\cdot)] = \int_a^b L\,(x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t\,. \tag{6.25}$$

A condição necessária clássica de Weierstrass pode ser facilmente deduzida do facto que o integral (6.25) é invariante sob transformações da forma $T = t + p(t)$, $X = x(t)$, para uma função arbitrária $p(\cdot)$ (*vide* [165, p. 161]). O segundo teorema de Noether está relacionado com os problemas variacionais invariantes no tempo, como sejam os problemas na forma homogénea-paramétrica (*vide* [74, p. 266], [165, Ch. 8], [117, p. 179]); com o carácter singular do Lagrangeano e as restrições no formalismo Hamiltoniano, um assunto estudado por Dirac e Bergmann (*vide* [124, 127]); e com a física das teorias de gauge, como sejam as transformações de gauge da electrodinâmica, dos campos electromagnéticos, hidromecânica e relatividade (*vide* [117, pp. 186–189], [165, p. 160], [164], [245]). Por exemplo, se o Lagrangeano L representar uma partícula de carga eléctrica interagindo com um campo electromagnético, vemos que ele é invariante sob a acção combinada da chamada transformação de gauge de primeira classe no campo da partícula carregada e sob uma transformação de gauge de segunda classe no campo electromagnético. Como resultado desta invariância conclui-se, do segundo teorema de Noether, a muito importante conservação de carga. A invariância sob transformações de gauge é um requisito básico na teoria dos campos de Yang-Mills, um assunto importante, com muitas questões para uma compreensão matemática (cf. [135]).

Tanto quanto sabemos, nenhum resultado do tipo do segundo teorema de Noether se encontra disponível no contexto do controlo óptimo. Uma tal generalização é obtida, mediante definições convenientes de *invariância* e *corrente de Noether*. A razão porque tal não foi ainda concebido parece dever-se à difícil generalização do argumento original de Emmy Noether [185, 186], que é razoavelmente complicado e profundamente enraizado em resultados conceptualmente difíceis e profundos do cálculo das variações. Da nossa abordagem, de natureza mais directa, um segundo teorema de Noether para controlo óptimo é obtido por alteração das definições e seguindo, *mutatis mutandis*, as demonstrações do nosso primeiro teorema. Mesmo no contexto clássico (cf. v.g. [164]) e na situação mais simples possível, para o problema fundamental do cálculo das variações, o resultado é novo porquanto consideramos simetrias do sistema que alteram a funcional custo a menos de um diferencial exacto; introduzimos uma noção de semi-invariância; e a família de transformações dependem também de $\dot{x}$ (o controlo). O resultado é, tal como os resultados do Capítulo 5, válido nas situações normal e anormal. Estes resultados já estão disponíveis (*vide* [274]) e foram apresentados na sessão *Optimal Control* da *5th Portuguese Conference on Automatic Control* – Controlo 2002 – que se realizou em Aveiro, de 5 a 7 de Setembro de 2002.

Várias extensões e inovações são possíveis nesta linha de investigação. Como já tivemos oportunidade de referir, embora os teoremas da simetria de Noether tenham sido derivados no trabalho original [185, 186] para variáveis de estado em espaços Euclidianos n-dimensionais, eles podem ser formulados em contextos com geometrias não Euclidianas. Estas extensões podem ser encontradas, no âmbito clássico, por exemplo em [144, 145, 198]. Vemos também a possibilidade de juntar os dois teoremas num só, construindo leis de conservação para problemas do controlo óptimo que são invariantes num sentido misto, i.e., que são invariantes sob uma família de transformações dependentes de ρ parâmetros e de k funções arbitrárias e suas derivadas até determinada ordem dada.

Como o princípio do máximo de Pontryagin pode ser formulado para problemas do controlo óptimo com restrições de estado (cf. v.g. [199, Cap. 6], [101], [295, Cap. 9], [80], [82]) outra possibilidade é a demonstração dos teoremas de Noether neste contexto. A igualdade (g é a função definidora das restrições e $\lambda(t)$ os respectivos multiplicadores) $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} - \lambda\frac{\partial g}{\partial t}$ deverá ter aí um papel importante, sendo também previsível uma sua generalização na linha de pensamento do Capítulo 3.

Serão estas algumas das direcções do nosso trabalho futuro. O cálculo das variações, depois de uma longa história, permanece bem activo e em crescimento. Pela nossa parte, por muitos e longos anos.

"Há que ler, há que ler..."

—Eça de Queiroz

Referências Bibliográficas

Quando disponíveis, fornecemos as entradas para os *reviews* no *Zentralblatt für Mathematik* ou nas *Mathematical Reviews*. Para publicações anteriores a 1931 damos indicação dos *reviews* no *Electronic Research Archive for Mathematics, Jahrbuch Database*. Os números entre { } indicam as páginas no texto onde o documento em questão foi citado.

[1] E. Acerbi and G. Mingione. Regularity results for a class of functionals with non-standard growth. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 156(2):121–140, 2001. Zbl pre01586360 MR 1814973 {118}

[2] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, and I. Kupka. Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2:377–448 (electronic), 1997. Zbl 0902.53033 MR 98i:53059 {77}

[3] A. A. Agrachev. Introduction to optimal control theory. In *Summer School on Mathematical Control Theory, Number 2*, ICTP Lecture Notes, Vol. 8, pages 451–513. The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, 2002. {37}

[4] A. A. Agrachev and R. V. Gamkrelidze. Symplectic geometry for optimal control. In *Nonlinear controllability and optimal control*, pages 263–277. Dekker, New York, 1990. MR 91f:49032 {37}

[5] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov. An intrinsic approach to the control of rolling bodies. In *Proc. 38-th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, 1999, vol. 1*, pages 431–435, Arizona, USA, December, 7–10 1999. {120}

[6] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov. Lectures on geometric control theory. Preprint Ref. 38/2001/M, SISSA, Trieste, Italy, May 2001. {42,71}

[7] A. A. Agrachev and A. V. Sarychev. Abnormal sub-Riemannian geodesics: Morse index and rigidity. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 13(6):635–690, 1996. Zbl 0866.58023 MR 98e:49047 {119}

[8] A. A. Agrachev and A. V. Sarychev. On abnormal extremals for Lagrange variational problems. *J. Math. Systems Estim. Control*, 8(1):87–118, 1998. Zbl 0826.49012 MR 99k:49041 {66,117}

[9] N. I. Akhiezer. *The calculus of variations*. Harwood Academic Publishers, Chur, 1988. Zbl 0718.49001 MR 89e:49001 {61}

[10] V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, and S. V. Fomin. *Optimal control*. Consultants Bureau, New York, 1987. Zbl 0689.49001 MR 89e:49002 {61,73}

[11] L. Ambrosio, O. Ascenzi, and G. Buttazzo. Lipschitz regularity for minimizers of integral functionals with highly discontinuous integrands. *J. Math. Anal. Appl.*, 142(2):301–316, 1989. Zbl 0689.49025 MR 91c:49060 {5,37,40,91,94}

[12] T. S. Angell. A note on approximation of optimal solutions of free problems of the calculus of variations. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 28(2):258–272, 1979. Zbl 0445.49006 MR 82a:49018 {4}

[13] V. I. Arnold. *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*. Editora Mir, Moscovo, 1987. {60,61,73}

[14] V. I. Arnold. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1988. Zbl 0648.34002 MR 89h:58049 {45,61}

[15] M. Atiyah, T. Gowers, J. Tate, and F. Tisseyre. *The CMI millennium meeting collection, Clay Mathematics Institute millennium meeting, Collège de France, Paris, France, May 24–25, 2000*. Springer VideoMath, 2002. Zbl pre01723624 {134}

[16] E. R. Avakov. First-order necessary conditions for abnormal problems in the calculus of variations. *Differentsial′nye Uravneniya*, 27(5):739–745, 916, 1991. MR 92j:49013 {117}

[17] J. C. Baez and J. W. Gilliam. An algebraic approach to discrete mechanics. *Lett. Math. Phys.*, 31(3):205–212, 1994. Zbl 0805.58031 MR 95i:58098 {62}

[18] J. M. Ball. Singularities and computation of minimizers for variational problems. In *Foundations of computational mathematics (Oxford, 1999)*, pages 1–20. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001. Zbl 0978.65053 MR 1836612 {4,5}

[19] J. M. Ball and V. J. Mizel. Singular minimizers for regular one-dimensional problems in the calculus of variations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 11(1):143–146, 1984. Zbl 0541.49010 MR 86f:49004 {3,90}

[20] J. M. Ball and V. J. Mizel. One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler Lagrange equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 90(4):325–388, 1985. Zbl 0585.49002 MR 86k:49002 {4,90,91}

[21] J. S. Baras. Group invariance and symmetries in nonlinear control and estimation. In *Nonlinear control in the year 2000, Vol. 1 (Paris)*, pages 137–169. Springer, London, 2001. MR 2001k:93034 {61}

[22] N. Bebiano. *Matemática ou mesas, cadeiras e canecas de cerveja.* Gradiva, Lisboa, Fevereiro 2000. {60}

[23] N. Bebiano. $2 + 2 = 11$. Gradiva, Lisboa, Outubro 2001. {18}

[24] M. Belloni. Interpretation of Lavrentiev phenomenon by relaxation: the higher order case. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(6):2011–2023, 1995. Zbl 0832.49007 MR 95i:49014 {119}

[25] P. Bérest. *Calcul des variations. Application à la mécanique et à la physique.* Ellipses, Paris, 1997. Zbl 0917.70001 {61}

[26] L. D. Berkovitz. *Optimal control theory.* Springer-Verlag, New York, 1974. Zbl 0295.49001 MR 51:8914 {12,40,42,44,107,111,115}

[27] S. Bernstein. Sur les équations du calcul des variations. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 29(3):431–485, 1912. {5,91}

[28] D. P. Bertsekas. *Dynamic programming and optimal control. II.* Athena Scientific, Belmont, MA, 1995. Zbl 0904.90170 {6}

[29] D. P. Bertsekas. *Dynamic programming and optimal control. I.* Athena Scientific, Belmont, MA, 2 edition, 2000. {6}

[30] D. Betounes. *Differential equations: theory and applications with Maple®.* Springer-Verlag–TELOS, New York, 2001. Zbl pre01614269 MR 2002b:34001 {46}

[31] G. Blankenstein and A. van der Schaft. Optimal control and implicit Hamiltonian systems. In *Nonlinear control in the year 2000, Vol. 1 (Paris)*, pages 185–205. Springer, London, 2001. MR 1806135 {40,48,62,63,64,65,66,76,85,88}

[32] G. Blankenstein and A. J. van der Schaft. Symmetry and reduction in implicit generalized Hamiltonian systems. *Rep. Math. Phys.*, 47(1):57–100, 2001. Zbl 0978.37046 MR 2002e:37083 {9,61,62,63,64,65,66,76,85,88}

[33] G. A. Bliss. Normality and abnormality in the calculus of variations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43(3):365–376, 1938. Zbl 0019.12303 MR 1501950 {117}

[34] G. A. Bliss. *Lectures on the Calculus of Variations*. University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1946. Zbl 0063.00459 MR 8:212e {23}

[35] V. Boltyanskii, H. Martini, and V. Soltan. *Geometric methods and optimization problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. Zbl 0933.90002 MR 2000c:90002 {12,22}

[36] B. Bonnard, M. Chyba, and E. Trélat. Sub-Riemannian geometry, one-parameter deformation of the Martinet flat case. *J. Dynam. Control Systems*, 4(1):59–76, 1998. Zbl pre01431852 MR 99f:58056 {77}

[37] B. Bonnard and E. Trélat. On the role of abnormal minimizers in sr-geometry. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Série 6*, X(3):405–491, 2001. {66}

[38] R. Brockett. New issues in the mathematics of control. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 189–219. Springer, Berlin, 2001. Zbl pre01687004 MR 1852158 {6,12}

[39] F. E. Browder. Remarks on the direct method of the calculus of variations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 20:251–258, 1965. Zbl 0135.32404 MR 32:4576 {3}

[40] A. E. Bryson Jr. Optimal control—1950 to 1985. *IEEE Control Systems*, pages 26–33, 1996. {11}

[41] G. Buttazzo and M. Belloni. A survey on old and recent results about the gap phenomenon in the calculus of variations. In *Recent developments in well-posed variational problems*, pages 1–27. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995. Zbl 0852.49001 MR 96h:49018 {4,119}

[42] G. Buttazzo and V. J. Mizel. Interpretation of the Lavrentiev phenomenon by relaxation. *J. Funct. Anal.*, 110(2):434–460, 1992. Zbl 0784.49006 MR 93i:49004 {119}

[43] N. Byers. E. Noether's discovery of the deep connection between symmetries and conservation laws. In *The heritage of Emmy Noether (Ramat-Gan, 1996)*, pages 67–81. Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999. Zbl 0931.01011 MR 99m:58001 {61}

[44] M. Camarinha. *A Geometria dos Polinómios Cúbicos em Variedades Riemannianas*. Tese de Doutoramento, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 1996. {48}

[45] C. Carathéodory. The beginning of research in the calculus of variations. *Osiris*, 3:224–240, 1937. Zbl 0018.19601 {116}

[46] C. Carathéodory. *Calculus of variations and partial differential equations of the first order*. Chelsea Publishing Company, New York, 1982. Zbl 0505.49001 {51}

[47] J. F. Cariñena and H. Figueroa. A geometrical version of Noether's theorem in supermechanics. *Rep. Math. Phys.*, 34(3):277–303, 1994. Zbl 0846.58008 MR 96g:58011 {62}

[48] E. Cartan. Les sous-groupes des groupes continus de transformations. *Annales de l'École Normale*, 3(25):57–76, 1908. {37}

[49] A. Cellina. On the validity of the Euler-Lagrange equation. *J. Differential Equations*, 171(2):430–442, 2001. MR 2001m:49025 {118}

[50] A. Cellina and S. Perrotta. On the validity of the maximum principle and of the Euler-Lagrange equation for a minimum problem depending on the gradient. *SIAM J. Control Optim.*, 36(6):1987–1998 (electronic), 1998. Zbl 0926.49014 MR 99g:49018 {118}

[51] L. Cesari. Existence theorems for Lagrange and Pontryagin problems of the calculus of variations and optimal control. More dimensional extensions in Sobolev spaces. In *Calculus of Variations Classical and Modern (I Ciclo Bressanone, 1966)*, pages 85–175, Roma, 1967. C.I.M.E., Edizioni Cremonese. Zbl 0204.18404 {94,115}

[52] L. Cesari. *Optimization—theory and applications*. Springer-Verlag, New York, 1983. Zbl 0506.49001 MR 85c:49001 {3,23,37,40,90,94,105,108,115}

[53] L. Cesari. A tribute to Leonida Tonelli: Leonida Tonelli (1885–1946) and his 20th century legacy. In *Contributions to modern calculus of variations (Bologna, 1985)*, pages 1–12. Longman Sci. Tech., Harlow, 1987. MR 88i:01096 {2,3,4}

[54] C.-W. Cheng and V. J. Mizel. On the Lavrentiev phenomenon for optimal control problems with second-order dynamics. *SIAM J. Control Optim.*, 34(6):2172–2179, 1996. Zbl 0883.49003 MR 97g:49014 {91}

[55] A. C. Chiang. *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1992. {6}

[56] F. H. Clarke. Admissible relaxation in variational and control problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 51(3):557–576, 1975. Zbl 0326.49031 MR 53:11448 {13,94}

[57] F. H. Clarke. The maximum principle under minimal hypotheses. *SIAM J. Control Optimization*, 14(6):1078–1091, 1976. Zbl 0344.49009 MR 54:3540 {41,71,108}

[58] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1983. Zbl 0727.90045 MR 85m:49002 {12,40,90,107,108}

[59] F. H. Clarke. Tonelli's regularity theory in the calculus of variations: recent progress. In *Optimization and related fields (Erice, 1984)*, pages 163–179. Springer, Berlin, 1986. Zbl 0589.49012 MR 87m:49001 {5,8}

[60] F. H. Clarke. Regularity, existence and necessary conditions for the basic problem in the calculus of variations. In *Contributions to modern calculus of variations (Bologna, 1985)*, pages 80–90. Longman Sci. Tech., Harlow, 1987. Zbl 0612.49002 MR 88d:49001 {5,91}

[61] F. H. Clarke. *Methods of dynamic and nonsmooth optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1989. Zbl 0696.49003 MR 91j:49001 {5,12,90,91,102}

[62] F. H. Clarke. An indirect method in the calculus of variations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 336(2):655–673, 1993. Zbl 0780.49016 MR 93f:49002 {37,40,61}

[63] F. H. Clarke. The calculus of variations, nonsmooth analysis and optimal control. In *Development of mathematics 1950–2000*, pages 313–328. Birkhäuser, Basel, 2000. Zbl 0970.49002 MR 2001h:49003 {5,8,18,91}

[64] F. H. Clarke and P. D. Loewen. Intermediate existence and regularity in the calculus of variations. *Appl. Math. Lett.*, 1(2):193–195, 1988. Zbl 0695.49001 MR 953384 {5}

[65] F. H. Clarke and P. D. Loewen. An intermediate existence theory in the calculus of variations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 16(4):487–526 (1990), 1989. Zbl 0727.49004 MR 91c:49061 {5}

[66] F. H. Clarke and P. D. Loewen. Variational problems with Lipschitzian minimizers. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 6(suppl.):185–209, 1989. Zbl 0677.49006 MR 90k:49003 {5,91}

[67] F. H. Clarke and R. B. Vinter. On the conditions under which the Euler equation or the maximum principle hold. *Appl. Math. Optim.*, 12(1):73–79, 1984. Zbl 0559.49012 MR 85m:49051 {3,90}

[68] F. H. Clarke and R. B. Vinter. Existence and regularity in the small in the calculus of variations. *J. Differential Equations*, 59(3):336–354, 1985. Zbl 0727.49003 MR 87a:49014 {5,91}

[69] F. H. Clarke and R. B. Vinter. Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 289(1):73–98, 1985. Zbl 0563.49009 MR 86h:49020 {5,40,61,91,94,102,117,118}

[70] F. H. Clarke and R. B. Vinter. Regularity of solutions to variational problems with polynomial Lagrangians. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 34(1-2):73–81, 1986. Zbl 0598.49013 MR 87j:49042 {5,91}

[71] F. H. Clarke and R. B. Vinter. Regularity properties of optimal controls. *SIAM J. Control Optim.*, 28(4):980–997, 1990. Zbl 0715.49039 MR 91b:49033 {7,91,94,110,117}

[72] F. H. Clarke and R. B. Vinter. A regularity theory for variational problems with higher order derivatives. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 320(1):227–251, 1990. Zbl 0702.49001 MR 90k:49006 {5,7,91,94,105,117}

[73] M. M. Connors and D. Teichroew. *Optimal control of dynamic operations research models*. International Textbook Company, Scranton, Pa, 1967. Zbl 0159.48801 {6}

[74] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol. I.* Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953. Zbl 0051.28802 MR 16:426a {60,121}

[75] G. Crasta and A. Malusa. Existence results for noncoercive variational problems. *SIAM J. Control Optim.*, 34(6):2064–2076, 1996. Zbl 0866.49001 MR 97h:49002 {115}

[76] B. Dacorogna. *Introduction au calcul des variations*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1992. Zbl 0757.49001 MR 93e:49001 {4,8}

[77] F. S. David. *O Cálculo Variacional Clássico e Algumas das Suas Aplicações à Física Matemática. Referência a Algumas Extensões mais Recentes*. EDP, Electricidade de Portugal, Gabinete de Planeamento de Centros Produtores, 1986. {6}

[78] A. M. Davie. Singular minimizers in the calculus of variations. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 900–905, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc. Zbl 0663.49006 MR 89e:49003 {5}

[79] A. M. Davie. Singular minimisers in the calculus of variations in one dimension. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 101(2):161–177, 1988. Zbl 0656.49005 MR 89c:49002 {5}

[80] M. de Pinho, M. M. A. Ferreira, and F. A. C. C. Fontes. A weak maximum principle for control problems with state constraints. In J. L. Martins de Carvalho, M. d. R. de Pinho, and F. A. C. C. Fontes, editors, *Proceeding of the European Control Conference, Porto, Portugal*, 2001. {115,122}

[81] M. d. R. de Pinho. On the weak maximum principle for optimal control problems with state dependent control constraints. *Nonlinear Anal.*, 30(4):2481–2488, 1997. Zbl 0902.49012 MR 1490364 {42}

[82] M. d. R. de Pinho and M. M. Ferreira. *Optimal control problems with constraints.* Editura Electus, Bucharest, 2002. MR 1897883 {42,122}

[83] M. d. R. de Pinho and A. Ilchmann. Weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints. *Nonlinear Anal.*, 48(8, Ser. A: Theory Methods):1179–1196, 2002. MR 1880580 {42,115}

[84] M. d. R. de Pinho and R. B. Vinter. Necessary conditions for optimal control problems involving nonlinear differential algebraic equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 212(2):493–516, 1997. Zbl 0891.49013 MR 98f:49023 {42,115}

[85] M. d. R. de Pinho, R. B. Vinter, and H. Zheng. A maximum principle for optimal control problems with mixed constraints. *IMA J. Math. Control Inform.*, 18(2):189–205, 2001. Zbl pre01623073 MR 2002c:49037 {42}

[86] F. R. Dias Agudo. *Análise Real*, volume III. Escolar Editora, Lisboa, 1992. {19}

[87] D. S. Djukic. Noether's theorem for optimum control systems. *Internat. J. Control (1)*, 18:667–672, 1973. Zbl 0281.49009 MR 49:5979 {62}

[88] A. Y. Dubovitskii and A. A. Milyutin. The extremum problem in the presence of constraints. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 149(4):759–762, 1963. {37}

[89] A. Y. Dubovitskii and A. A. Milyutin. Extremum problems in the presence of constraints. *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 5(3):395–453, 1965. {37}

[90] A. Durán. *Symmetries of differential equations and numerical applications.* Universidade de Coimbra Departamento de Matemática, Coimbra, 1999. Zbl 0967.34001 MR 2001f:35024 {45,120}

[91] I. Ekeland. The calculus of variations: from minimization problems to critical point theory. In *Contributions to modern calculus of variations (Bologna, 1985)*, pages 91–100. Longman Sci. Tech., Harlow, 1987. Zbl 0618.49001 MR 88g:01030 {5}

[92] O. I. Elgerd. *Control Systems Theory.* McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1967. {6}

[93] L. Elsgolts. *Differential equations and the calculus of variations.* Mir Publishers, Moscow, 1973. MR 49:9291 {4}

[94] G. Erdmann. Ueber unstetige Lösungen in der Variationsrechnung. *Borchardt J. LXX-XII. 21–30*, 1876. JFM 08.0224.02 {60}

[95] L. Esposito, F. Leonetti, and G. Mingione. Regularity for minimizers of functionals with *p*-*q* growth. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 6(2):133–148, 1999. MR 2000h:49056 {118}

[96] L. Euler. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattisimo sensu accepti. *Bousquet, Lausannae et Genevae*, E65A.O.O. Ser. I(24), 1744. {60}

[97] H. O. Fattorini. *Infinite-dimensional optimization and control theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Zbl 0931.49001 MR 2000d:49001 {40,43,44}

[98] H. O. Fattorini. The maximum principle for control systems described by linear parabolic equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 259(2):630–651, 2001. Zbl pre01657961 MR 1842083 {118}

[99] U. Felgenhauer. On Ritz type discretizations for optimal control problems. In *Systems modelling and optimization (Detroit, MI, 1997)*, pages 91–99. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999. Zbl 0937.49016 MR 2000a:49060 {4}

[100] U. Felgenhauer. Regularity properties of optimal controls with application to discrete approximation. *J. Optim. Theory Appl.*, 102(1):97–110, 1999. Zbl 0956.49018 MR 2000h:49051 {4}

[101] M. M. A. Ferreira, F. A. C. C. Fontes, and R. B. Vinter. Nondegenerate necessary conditions for nonconvex optimal control problems with state constraints. *J. Math. Anal. Appl.*, 233(1):116–129, 1999. Zbl 0931.49015 MR 2000a:49035 {42,115,122}

[102] A. F. Filippov. On some questions in the theory of optimal regulation: existence of a solution of the problem of optimal regulation in the class of bounded measurable functions. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. Fiz. Him.*, 1959(2):25–32, 1959. Zbl 0090.06902 MR 22:13373 {108,115}

[103] A. F. Filippov. On certain questions in the theory of optimal control. *J. SIAM Control Ser. A*, 1:76–84, 1962. Zbl 0139.05102 MR 26:7469 {6,108}

[104] K. R. Fister, S. Lenhart, and J. S. McNally. Optimizing chemotherapy in an HIV model. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 32, 12 pp. (electronic), 1998. MR 99i:92007 {6}

[105] I. Fonseca, S. Müller, and P. Pedregal. Analysis of concentration and oscillation effects generated by gradients. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(3):736–756 (electronic), 1998. Zbl 0920.49009 MR 99e:49013 {119}

[106] C. Fox. *An introduction to the calculus of variations.* Dover Publications Inc., New York, 1987. Zbl 0653.49001 MR 88i:49001 {4}

[107] G. Freiling, G. Jank, and A. Sarychev. Non-blow-up conditions for Riccati-type matrix differential and difference equations. *Results Math.*, 37(1-2):84–103, 2000. Zbl 0964.34005 MR 2000m:34007 {40}

[108] N. Fusco, P. Marcellini, and A. Ornelas. Existence of minimizers for some nonconvex one-dimensional integrals. *Portugal. Math.*, 55(2):167–185, 1998. Zbl 0912.49015 MR 99e:49002 {95}

[109] R. V. Gamkrelidze. Optimal sliding states. *Sov. Math., Dokl.*, 3:559–562, 1962. Zbl 0131.32402 {94,119}

[110] R. V. Gamkrelidze. On some extremal problems in the theory of differential equations with applications to the theory of optimal control. *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control*, 3:106–128, 1965. Zbl 0296.49009 MR 33:1162 {94}

[111] R. V. Gamkrelidze. *Principles of optimal control theory.* Plenum Press, New York, 1978. Zbl 0401.49001 MR 58:33350c {21,22,23,36,39,94,95,119}

[112] R. V. Gamkrelidze. Sliding modes in optimal control theory. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 169:180–193, 255, 1985. Zbl 0599.49010 MR 87i:49027 {94,119}

[113] R. V. Gamkrelidze. Discovery of the maximum principle. *J. Dynam. Control Systems*, 5(4):437–451, 1999. Zbl 0955.49001 MR 2000j:49002 {12}

[114] R. V. Gamkrelidze. The mathematical work of L. S. Pontryagin. *J. Math. Sci. (New York)*, 100(5):2447–2457, 2000. Zbl pre01526512 MR 2001h:01024 {12}

[115] R. B. Gardner. *The method of equivalence and its applications.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1989. Zbl 0694.53027 MR 91j:58007 {25,26,37}

[116] I. M. Gelfand and S. V. Fomin. *Calculus of variations.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963. Zbl 0127.05402 MR 28:3353 {37,62,64}

[117] I. M. Gelfand and S. V. Fomin. *Calculus of variations.* Dover Publications, Mineola, NY, 2000. Zbl 0964.49001 {60,62,72,73,121}

[118] D. Giachetti and M. M. Porzio. Local regularity results for minima of functionals of the calculus of variation. *Nonlinear Anal.*, 39(4, Ser. A: Theory Methods):463–482, 2000. Zbl 0942.49029 MR 2001b:49052 {118}

[119] M. Giaquinta and S. Hildebrandt. *Calculus of variations I. The Lagrangian formalism*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Zbl 0853.49001 MR 98b:49002a {61,62}

[120] J. W. Gilliam. *Lagrangian and Symplectic Techniques in Discrete Mechanics*. Ph.D. dissertation, University of California Riverside, August 1996. {62}

[121] I. V. Girsanov. *Lectures on mathematical theory of extremum problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Zbl 0234.49016 MR 57:3958 {37}

[122] H. H. Goldstine. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*. Springer-Verlag, New York, 1980. Zbl 0452.49002 MR 83i:01036 {2}

[123] F. Gomes Teixeira. Calculo das variações. Transcrição do texto original (Coimbra 16 de Junho de 1871), elaborada por ocasião do 150^o aniversário de Francisco Gomes Teixeira, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2001. {18}

[124] X. Gràcia and J. M. Pons. Canonical Noether symmetries and commutativity properties for gauge systems. *J. Math. Phys.*, 41(11):7333–7351, 2000. Zbl pre01639412 MR 2001k:70023 {121}

[125] J. W. Grizzle and S. I. Marcus. The structure of nonlinear control systems possessing symmetries. *IEEE Trans. Automat. Control*, 30(3):248–258, 1985. MR 86e:93030 {9,61}

[126] M. R. Grossinho, M. Ramos, C. Rebelo, and L. Sanchez, editors. *Nonlinear analysis and its applications to differential equations*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001. Zbl 0970.00019 MR 2001f:00027 {140}

[127] M. Guerra. *Soluções Generalizadas para Problemas L-Q Singulares*. Tese de Doutoramento, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2001. {121}

[128] L. Haws and T. Kiser. Exploring the brachistochrone problem. *Amer. Math. Monthly*, 102(4):328–336, 1995. MR 96c:49032 {18}

[129] A. C. Heinricher and V. J. Mizel. The Lavrentiev phenomenon for invariant variational problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 102(1):57–93, 1988. Zbl 0655.49003 MR 90a:49020 {9,61}

[130] P. G. Henriques. The Noether theorem and the reduction procedure for the variational calculus in the context of differential systems. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317(10):987–992, 1993. Zbl 0798.58020 MR 94k:58003 {61}

[131] H. Hermes and J. P. LaSalle. *Functional analysis and time optimal control*. Academic Press, New York, 1969. Zbl 0203.47504 MR 54:8380 {21}

[132] D. Hilbert. Grundlagen der physik. *Math. Ann.*, 92:258–289, 1924. {120}

[133] F. B. Hildebrand. *Methods of applied mathematics*. Dover Publications Inc., New York, 1992. Zbl 0805.70001 MR 93d:00003 {4}

[134] R. Isaacs. *Differential games. A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1965. Zbl 0125.38001 MR 35:1362 {6}

[135] A. Jaffe and E. Witten. Quantum Yang-Mills theory. Problem Description of the Yang-Mills Existence and Mass Gap Millennium Prize Problem, The Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts (CMI), http://www.claymath.org/prizeproblems/yang_mills.pdf. See [15]. {121}

[136] B. Jakubczyk. Equivalence and invariants of nonlinear control systems. In *Nonlinear controllability and optimal control*, pages 177–218. Dekker, New York, 1990. Zbl 0712.93027 MR 91c:93045 {61}

[137] J. Jost and X. Li-Jost. *Calculus of variations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Zbl 0913.49001 MR 2000m:49002 {37,61,64,73}

[138] V. Jurdjevic. *Geometric control theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Zbl 0940.93005 MR 98a:93002 {7,62,63,64,65,73,76,88}

[139] V. Jurdjevic. Optimal control, geometry, and mechanics. In *Mathematical control theory*, pages 227–267. Springer, New York, 1999. Zbl pre01303235 MR 99k:49045 {62}

[140] A. H. Kara, F. M. Mahomed, and A. A. Adam. Reduction of differential equations using Lie and Noether symmetries associated with first integrals. *Lie Groups Appl.*, 1(1):137–145, 1994. Zbl 0938.35505 MR 95i:58070 {61}

[141] R. Klötzler. On Pontryagin's maximum principle for multiple integrals. *Beiträge Analysis 8*, pages 67–75, 1976. Zbl 0326.49017 MR 56:1170 {118}

[142] R. Klötzler. Pontryagin's maximum principle for multiple integrals. In *System modelling and optimization (Zurich, 1991)*, pages 323–333. Springer, Berlin, 1992. Zbl 0787.49003 MR 1182349 {118}

[143] A. N. e. Kolmogorov and A. P. e. Yushkevich. *Mathematics of the 19th century. Constructive function theory, ordinary differential equations, calculus of variations, theory of finite differences*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998. Zbl 0892.01004 MR 99d:01022 {2}

[144] J. Komorowski. A modern version of the E. Noether's theorems in the calculus of variations. I. *Studia Math.*, 29:261–273, 1968. Zbl 0155.17602 MR 37:799 {61,73,122}

[145] J. Komorowski. A modern version of the E. Noether's theorems in the calculus of variations. II. *Studia Math.*, 32:181–190, 1969. Zbl 0176.41402 MR 39:7485 {122}

[146] P. Korman. Remarks on Nagumo's condition. *Portugal. Math.*, 55(1):1–9, 1998. Zbl 0894.34015 MR 98m:34038 {37}

[147] O. Krupková. Noether theorem and first integrals of constrained Lagrangean systems. *Math. Bohem.*, 122(3):257–265, 1997. Zbl 0897.58024 MR 99b:58095 {46}

[148] C. Lanczos. Emmy Noether and the calculus of variations. *Bull. Inst. Math. Appl.*, 9(8):253–258, 1973. MR 58:21260 {64}

[149] H. A. Lauwerier. *Calculus of variations in mathematical physics*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1966. Zbl 0169.13601 MR 35:2189 {39}

[150] M. Lavrentiev. Sur quelques problèmes du calcul des variations. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4:7–28, 1927. JFM 53.0481.02 {4,91}

[151] H. Lebesgue. Intégrale, longueur, aire. *Annali di Mat.*, 7(3):231–359, 1902. JFM 33.0307.02 {3}

[152] H. Lebesgue. Sur le developpement de la notion d'integrale. *Revue de Metaphys. et de Morale*, 34(2):149–167, 1927. JFM 53.0208.02 {3}

[153] H. Lebesgue. Sobre o desenvolvimento da noção de integral. *Boletim da SPM*, 45:3–19, Outubro 2001. {3}

[154] U. Ledzewicz. Extension of the local maximum principle to abnormal optimal control problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 77(3):661–681, 1993. Zbl 0796.49020 MR 94f:49006 {117}

[155] U. Ledzewicz and H. Schättler. Analysis of abnormal extremals in optimal control. In *Differential geometry and control (Boulder, CO, 1997)*, pages 223–239. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. Zbl 0921.49011 MR 99m:49036 {117}

[156] E. B. Lee and L. Markus. *Foundations of optimal control theory*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1967. Zbl 0159.13201 MR 36:3596 {12}

[157] A. Leitão. *Cálculo variacional e controle ótimo*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001. Zbl pre01659603 MR 1846384 {6,8,18,37,42}

[158] D. Léonard and N. V. Long. *Optimal control theory and static optimization in economics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992. MR 93d:49002 {6}

[159] F. Leonetti. Regularity results for minimizers of integral functionals with nonstandard growth. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 43(2):425–429, 1995. Zbl 0851.49025 MR 1366070 {118}

[160] G. M. Lieberman. On the regularity of the minimizer of a functional with exponential growth. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 33(1):45–49, 1992. Zbl 0776.49026 MR 93g:49029 {118}

[161] J.-L. Lions. *Optimal control of systems governed by partial differential equations.* Springer-Verlag, New York, 1971. Zbl 0203.09001 MR 42:6395 {118}

[162] P. D. Loewen. *Optimal control via nonsmooth analysis.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. Zbl 0874.49002 MR 94h:49003 {8}

[163] J. D. Logan. Generalized invariant variational problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 38:174–186, 1972. Zbl 0202.11704 MR 48:984 {61}

[164] J. D. Logan. On variational problems which admit an infinite continuous group. *Yokohama Math. J.*, 22:31–42, 1974. Zbl 0295.49023 MR 50:14419 {121,122}

[165] J. D. Logan. *Invariant variational principles.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1977. MR 58:18024 {61,62,121}

[166] S. Lojasiewicz, Jr.. Invariance of extremals. In *Nonlinear controllability and optimal control*, pages 237–261. Dekker, New York, 1990. Zbl 0739.49005 MR 91i:49002 {41}

[167] D. Lovelock and H. Rund. *Tensors, differential forms, and variational principles.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1975. MR 57:13703 {62,64,70,120}

[168] B. Manià. Sopra un esempio di Lavrentieff. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 13:147–153, 1934. {4,91,119}

[169] P. Marcellini. Non convex integrals of the calculus of variations. In *Methods of nonconvex analysis (Varenna, 1989)*, pages 16–57. Springer, Berlin, 1990. Zbl 0735.49002 MR 91j:49002 {95}

[170] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity.* Dover Publications Inc., New York, 1994. MR 95h:73022 {60,61}

[171] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry.* Springer-Verlag, New York, 1999. Zbl 0933.70003 MR 2000i:70002 {40}

[172] E. J. McShane. Relaxed controls and variational problems. *SIAM J. Control*, 5:438–485, 1967. Zbl 0153.13104 MR 36:2033 {119}

[173] A. A. Milyutin and N. P. Osmolovskii. *Calculus of variations and optimal control*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. Zbl 0911.49001 MR 99g:49002 {37}

[174] V. J. Mizel. On the ubiquity of fracture in nonlinear elasticity. *J. Elasticity*, 52(3):257–266, 1998/99. Zbl 0944.74014 MR 2000k:74011 {4}

[175] V. J. Mizel. New developments concerning the Lavrentiev phenomenon. In *Calculus of variations and differential equations (Haifa, 1998)*, pages 185–191. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000. Zbl 0961.49009 MR 2000f:49011 {4,91}

[176] V. J. Mizel. Recent progress on the Lavrentiev phenomenon with applications. In *Differential equations and control theory (Athens, OH, 2000)*, pages 257–261. Dekker, New York, 2002. MR 1890568 {91}

[177] R. Montgomery. Abnormal minimizers. *SIAM J. Control Optim.*, 32(6):1605–1620, 1994. Zbl 0816.49019 MR 95g:49006 {117}

[178] R. Montgomery. A new solution to the three-body problem. *Notices Amer. Math. Soc.*, 48(5):471–481, 2001. Zbl pre01674454 MR 1822958 {61}

[179] C. S. Morawetz. Variations on conservation laws for the wave equation. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 37(2):141–154 (electronic), 2000. Zbl 0957.35100 MR 2001a:35105 {61}

[180] B. S. Mordukhovich. Existence theorems in nonconvex optimal control. In *Calculus of variations and optimal control (Haifa, 1998)*, pages 173–197. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000. Zbl 0962.49002 MR 2000i:49005 {95,115}

[181] C. B. Morrey, Jr.. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966. Zbl 0142.38701 MR 34:2380 {5,91}

[182] C. Mosna. Regularity of Lipschitz minima. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 104:109–127, 2000. MR 2002a:49049 {118}

[183] J. Muñoz and P. Pedregal. A refinement on existence results in nonconvex optimal control. *Nonlinear Anal.*, 46(3, Ser. A: Theory Methods):381–398, 2001. MR 1851859 {95,115}

[184] H. Nijmeijer and A. van der Schaft. *Nonlinear dynamical control systems*. Springer-Verlag, New York, 1990. Zbl 0701.93001 MR 91d:93024 {45}

[185] E. Noether. Invariante variationsprobleme. *Gött. Nachr.*, pages 235–257, 1918. JFM 46.0770.01 {60,62,70,73,120,122,138}

[186] E. Noether. Invariant variation problems. *Transport Theory Statist. Phys.*, 1(3):186–207, 1971. English translation of the original paper [185]. Zbl 0292.49008 MR 53:10538 {9,60,62,70,73,120,122}

[187] C. Olech. Existence theory in optimal control. In *Control theory and topics in functional analysis (Internat. Sem., Internat. Centre Theoret. Phys., Trieste, 1974), Vol. I*, pages 291–328. Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1976. Zbl 0353.49014 MR 58:23858 {2,115}

[188] P. J. Olver. Invariant theory, equivalence problems, and the calculus of variations. In *Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988)*, pages 59–81. Springer, New York, 1990. Zbl 0701.49043 MR 91c:49069 {25}

[189] P. J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations.* Springer-Verlag, New York, 1993. Zbl 0785.58003 MR 94g:58260 {61}

[190] P. J. Olver. *Equivalence, invariants, and symmetry.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Zbl 0837.58001 MR 96i:58005 {25}

[191] A. Ornelas. Existence of scalar minimizers for nonconvex simple integrals of sum type. *J. Math. Anal. Appl.*, 221(2):559–573, 1998. Zbl 0920.49026 MR 99d:49004 {95}

[192] P. Pedregal. *Parametrized measures and variational principles.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. Zbl 0879.49017 MR 98e:49001 {119}

[193] P. Pedregal. Optimization, relaxation and Young measures. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 36(1):27–58, 1999. Zbl 0916.49011 MR 2001b:49061 {119}

[194] F. L. Pereira. Control design for autonomous vehicles: a dynamic optimization perspective. *European Journal of Control*, 7(2–3):178–202, 2001. {6,11}

[195] F. L. Pereira and G. N. Silva. Necessary conditions of optimality for vector-valued impulsive control problems. *Systems Control Lett.*, 40(3):205–215, 2000. Zbl 0985.49023 MR 2002f:49046 {42,115}

[196] E. R. Pinch. *Optimal control and the calculus of variations.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993. Zbl 0776.49001 MR 94g:49001 {39}

[197] C. Pires. *Cálculo para Economistas.* McGraw-Hill de Portugal, Lda., Lisboa, 2001. {6}

[198] B. F. Plybon. New approach to the Noether theorems. *J. Mathematical Phys.*, 12:57–60, 1971. Zbl 0205.10902 MR 43:2591 {71,122}

[199] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes.* Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc. New York-London, 1962. Zbl 0882.01027 MR 29:3316b {6,7,12,39,40,41,42,44,70,90,95,106,107,111,122}

[200] J.-P. Raymond. Existence theorems in optimal control problems without convexity assumptions. *J. Optim. Theory Appl.*, 67(1):109–132, 1990. Zbl 0687.49001 MR 92e:49006 {115}

[201] J. N. Reddy. *Applied functional analysis and variational methods in engineering.* Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Malabar, FL, 1991. Zbl 0778.73001 MR 93b:00002 {4}

[202] W. Respondek. On decomposition of nonlinear control systems. *Systems Control Lett.*, 1(5):301–308, 1981/82. Zbl 0499.93030 MR 83m:93032 {61}

[203] R. T. Rockafellar. Existence theorems for general control problems of Bolza and Lagrange. *Advances in Math.*, 15:312–333, 1975. Zbl 0319.49001 MR 51:1526 {115}

[204] T. Roubíček. *Relaxation in optimization theory and variational calculus.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1997. Zbl 0880.49002 MR 98e:49002 {119}

[205] P. Rouchon. Flatness based design. Lecture notes, Summer School on Mathematical Control Theory SMR1327/17, The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, September 2001. {67}

[206] E. Roxin. The existence of optimal controls. *Michigan Math. J.*, 9:109–119, 1962. Zbl 0105.07801 MR 25:305 {115}

[207] E. O. Roxin. Problems about the set of attainability. In *Calculus of Variations Classical and Modern (I Ciclo Bressanone, 1966)*, pages 239–369, Roma, 1967. C.I.M.E., Edizioni Cremonese. Zbl 0189.46402 {94}

[208] H. Rund. Some remarks concerning Carathéodory's method of "equivalent" integrals in the calculus of variations. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 62 = Indag. Math.*, 21:135–141, 1959. Zbl 0142.38803 MR 23:A532 {51}

[209] H. Rund. *The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations: Its role in mathematics and physics.* D. Van Nostrand Co., Ltd., London-Toronto, Ont.-New York, 1966. Zbl 0141.10602 MR 37:5752 {40,62,73}

[210] H. Rund. A direct approach to Noether's theorem in the calculus of variations. *Utilitas Math.*, 2:205–214, 1972. Zbl 0256.49019 MR 46:9838 {62,70}

[211] H. Rund. Pontryagin functions for multiple integral control problems. *J. Optimization Theory Appl.*, 18(4):511–520, 1976. Zbl 0304.49010 MR 56:9385 {118}

[212] L. A. Santaló. Origen y evolución de algunas teorias matemáticas. *Gazeta de Matemática*, Agosto(29):16–18, 1946. {19}

[213] R. W. H. Sargent. Optimal control. *J. Comput. Appl. Math.*, 124(1-2):361–371, 2000. Zbl 0970.49003 MR 1803309 {4,6,11}

[214] A. V. Sarychev. High-order necessary conditions of optimality for nonlinear control systems. *Systems Control Lett.*, 16(5):369–378, 1991. Zbl 0732.49013 MR 92m:49034 {115}

[215] A. V. Sarychev. First- and second-order integral functionals of the calculus of variations which exhibit the Lavrentiev phenomenon. *J. Dynam. Control Systems*, 3(4):565–588, 1997. Zbl 0951.49011 MR 98m:49011 {4,5,106,118,119}

[216] A. V. Sarychev and H. Nijmeijer. Extremal controls for chained systems. *J. Dynam. Control Systems*, 2(4):503–527, 1996. Zbl 0947.49015 MR 98c:49007 {13}

[217] A. V. Sarychev and D. F. M. Torres. Lipschitzian regularity of minimizers for optimal control problems with control-affine dynamics. *Appl. Math. Optim.*, 41(2):237–254, 2000. Zbl 0961.49021 MR 2000m:49048 {*ix*,*xi*,6,7,37,40,61,92,110,112,117,146}

[218] A. V. Sarychev and D. F. M. Torres. Lipschitzian regularity conditions for the minimizing trajectories of optimal control problems. In *Nonlinear analysis and its applications to differential equations (Lisbon, 1998)*, pages 357–368. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001. For the entire collection see [126]. Zbl 0987.49021 MR 2001j:49062 {*ix*,*xi*,7,107,112}

[219] R. Sato, T. Nôno, and F. Mimura. Hidden symmetries: Lie groups and economic conservation laws. In *Operations research and economic theory*, pages 35–54. Springer, Berlin, 1984. Zbl 0559.90016 MR 86j:90042 {61}

[220] R. Sato and R. Ramachandran. Symmetry: an overview of geometric methods in economics. In *Conservation laws and symmetry*, pages 1–51. Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 1990. MR 1118383 {61}

[221] R. Sato and R. V. Ramachandran, editors. *Conservation laws and symmetry.* Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1990. Applications to economics and finance. Zbl 0772.90001 MR 92b:90003 {61}

[222] D. Serre. Systems of conservation laws: a challenge for the XXIst century. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 1061–1080. Springer, Berlin, 2001. Zbl pre01687049 MR 1852203 {60}

[223] S. P. Sethi and G. L. Thompson. *Optimal control theory.* Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, second edition, 2000. Applications to management science and economics. Zbl pre01734433 MR 1883960 {6}

[224] F. Siepe. On the Lipschitz regularity of minimizers of anisotropic functionals. *J. Math. Anal. Appl.*, 263(1):69–94, 2001. Zbl pre01705559 MR 1864307 {118}

[225] F. Silva Leite, M. Camarinha, and P. Crouch. Elastic curves as solutions of Riemannian and sub-Riemannian control problems. *Math. Control Signals Systems*, 13(2):140–155, 2000. Zbl pre01495919 MR 2001e:49010 {48}

[226] D. R. Smith. *Variational methods in optimization.* Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1998. Zbl 0918.49001 MR 99g:49001 {6,39}

[227] J. Sniatycki. Nonholonomic Noether theorem and reduction of symmetries. *Rep. Math. Phys.*, 42(1-2):5–23, 1998. Zbl 0947.70013 MR 2000a:37060 {61}

[228] V. Staicu. Equações diferenciais. Relatório da disciplina de equações diferenciais, provas de agregação em matemática, Universidade de Aveiro, Novembro 2000. {45}

[229] H. J. Sussmann. Optimal control. In *Three decades of mathematical system theory*, pages 409–425. Springer, Berlin, 1989. Zbl 0703.49003 MR 1025799 {12}

[230] H. J. Sussmann. Thirty years of optimal control. Was the path unique? In *Modern optimal control*, pages 359–375. Dekker, New York, 1989. Zbl 0703.49016 MR 91e:01018 {12}

[231] H. J. Sussmann. A strong version of the maximum principle under weak hypotheses. In *Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, FL, 1994*, pages 1950–1956, New York, 1994. IEEE Publications. {41}

[232] H. J. Sussmann. Symmetries and integrals of motion in optimal control. In *Geometry in nonlinear control and differential inclusions (Warsaw, 1993)*, pages 379–393. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995. Zbl 0891.49011 MR 96i:49037 {62,63,64,65,73,76,85,88}

[233] H. J. Sussmann. A cornucopia of four-dimensional abnormal sub-Riemannian minimizers. In *Sub-Riemannian geometry*, pages 341–364. Birkhäuser, Basel, 1996. Zbl 0862.53033 MR 98a:58040 {66,117}

[234] H. J. Sussmann. An introduction to the coordinate-free maximum principle. In *Geometry of feedback and optimal control*, pages 463–557. Dekker, New York, 1998. Zbl 0925.93135 MR 1493021 {71}

[235] H. J. Sussmann. Geometry and optimal control. In *Mathematical control theory*, pages 140–198. Springer, New York, 1999. Zbl pre01303233 MR 99k:49051 {12}

[236] H. J. Sussmann. New theories of set-valued differentials and new versions of the maximum principle of optimal control theory. In *Nonlinear control in the year 2000, Vol. 2 (Paris)*, pages 487–526. Springer, London, 2001. Zbl pre01584893 MR 2002e:49040 {71,108}

[237] H. J. Sussmann and G. Q. Tang. Shortest paths for the Reeds-Shepp car: A worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control. Technical Report 91-10, Rutgers Center for Systems and Control, September 1991. {67}

[238] H. J. Sussmann and J. C. Willems. 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. *IEEE Control Systems*, pages 32–44, 1997. {18,142}

[239] H. J. Sussmann and J. C. Willems. 300 anos de controlo optimal: da braquistócrona ao princípio do máximo. *Boletim da SPM*, 45:21–54, Outubro 2001. Tradução portuguesa do artigo original [238]. {18}

[240] H. J. Sussmann and J. C. Willems. The brachistochrone problem and modern control theory. In *Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications (México City, 2000)*, pages 113–166. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002. MR 1881487 {18}

[241] M. A. Sychev. Regularity of solutions of some variational problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 316(6):1326–1330, 1991. Zbl 0758.49013 MR 92g:49036 {5}

[242] M. A. Sychev. On the regularity of solutions of variational problems. *Mat. Sb.*, 183(4):118–142, 1992. Zbl 0782.49025 MR 93h:49057 {5}

[243] M. A. Sychev and V. J. Mizel. A condition on the value function both necessary and sufficient for full regularity of minimizers of one-dimensional variational problems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(1):119–133, 1998. Zbl 0888.49028 MR 98d:49048 {5}

[244] L. V. Tavares and F. N. Correia. *Optimização Linear e Não Linear – Conceitos, Métodos e Algoritmos*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1986. {6}

[245] M. A. Tavel. Milestones in mathematical physics: Noether's theorem. *Transport Theory Statist. Phys.*, 1(3):183–185, 1971. Zbl 0291.49035 MR 53:10537 {61,121}

[246] V. M. Tikhomirov. *Fundamental principles of the theory of extremal problems*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1986. Zbl 0595.49001 MR 87m:49004 {60,61}

[247] V. M. Tikhomirov. *Stories about maxima and minima*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. Zbl 0746.49001 MR 92k:49002 {18,115}

[248] L. Tonelli. Sui massimi e minimi assoluti del calcolo delle variazioni. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 32:297–337, 1911. JFM 42.0400.01 {2,3}

[249] L. Tonelli. Sui problemi isoperimetrici. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 36:333–344, 1913. JFM 44.0446.01 {3}

[250] L. Tonelli. Sul problema degli isoperimetri. *Rom. Acc. L. Rend.*, 22(1):424–430, 1913. JFM 44.0445.01 {3}

[251] L. Tonelli. Sull' esistenza della soluzione in problemi di calcolo delle variazioni. *Rom. Acc. L. Rend.*, 22(1):860–866, 1913. JFM 44.0443.01 {3}

[252] L. Tonelli. Sul problema degli isoperimetri. *Rom. Acc. L. Rend.*, 23_2(5):572–577, 1914. JFM 45.0617.01 {3}

[253] L. Tonelli. Sur une méthode directe du calcul des variations. *C. R. de l'Acad. des sc. de Paris*, 158:1776–1778; 1983–1985, 1914. JFM 45.0615.01 {3}

[254] L. Tonelli. Sur une méthode directe du calcul des variations. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 39:233–264, 1915. JFM 45.0615.02 {3,91,108}

[255] L. Tonelli. La semicontinuità nel calcolo delle variazioni. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 44:167–249, 1920. JFM 47.0472.01 {3}

[256] L. Tonelli. Su alcuni punti di calcolo delle variazioni. *Rom. Acc. L. Rend.*, 29_1(5):305–309, 1920. JFM 47.0471.05 {3}

[257] L. Tonelli. Criteri per l'esistenza della soluzione in problemi di calcolo delle variazioni. *Annali di Mat.*, 30(3):159–221, 1921. JFM 48.1273.02 {3}

[258] L. Tonelli. *Fondamenti di calcolo delle variazioni. I.* Nicola Zanichelli, Bologna, 1922. JFM 48.0581.09 {5}

[259] L. Tonelli. *Fondamenti di calcol delle variazioni. Volume secondo.* Nicola Zanichelli, Bologna, 1923. JFM 49.0348.05 {5}

[260] L. Tonelli. Sur la semi-continuite des integrales doubles du calcul des variations. *Acta Math.*, 53:325–346, 1929. JFM 55.0899.02 {3}

[261] L. Tonelli. *Opere scelte. Vol II: Calcolo delle variazioni.* Edizioni Cremonese, Rome, 1961. Zbl 0131.24103 MR 23:A3041 {5}

[262] L. Tonelli. *Opere scelte. Vol. III: Calcolo delle variazioni.* Edizioni Cremonese, Rome, 1962. Zbl 0131.24103 MR 27:25 {5}

[263] D. F. M. Torres. Regularidade Lipschitziana dos minimizantes no cálculo das variações e controlo óptimo. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, Dezembro 1997. {2,3,4,5,6,7,8,9,19,37,92,119}

[264] D. F. M. Torres. On the Noether theorem for optimal control. Research report CM00/I-13, Department of Mathematics, University of Aveiro, September 2000. Revised version published in [266]. See [275] for more details. {*ix*,*xi*,88}

[265] D. F. M. Torres. Conservation laws in optimal control. Research report CM01/I-06, Department of Mathematics, University of Aveiro, Abril 2001. Published, with minor changes, in [270]. {*ix*,*xi*,73,88}

[266] D. F. M. Torres. On the Noether theorem for optimal control. In *Proc. 6th European Control Conference ECC'01, Porto, Portugal, September 2001*, pages 244–249, 2001. {*ix*,*xi*,9,65,85,88,144}

[267] D. F. M. Torres. Regularity of minimizers in optimal control. Research report CM01/I-16, Department of Mathematics, University of Aveiro, October 2001. Published in [276]. See [279] for more details. {*ix*,*xi*}

[268] D. F. M. Torres. A remarkable property of the dynamic optimization extremals. Research report CM01/I-14, Department of Mathematics, University of Aveiro, July 2001. E-Print: Optimization Online, http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2001/08/366.html. Accepted to the journal *Investigação Operacional.* {*ix*,*xi*,9,49}

[269] D. F. M. Torres. Carathéodory-equivalence, Noether theorems, and Tonelli full-regularity in the calculus of variations and optimal control. Research report CM02/I-16, Department of Mathematics, University of Aveiro, July 2002. E-Print: arXiv:math.OC/0206230, http://arXiv.org/abs/math/0206230. Submitted to [278]. {*ix*,*xi*,113}

[270] D. F. M. Torres. Conservation laws in optimal control. In *Dynamics, Bifurcations and Control*, volume 273 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 287–296. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002. MR 1901565 $\{ix,xi,9,40,64,65,72,85,88,144\}$

[271] D. F. M. Torres. Conserved quantities along the Pontryagin extremals of quasi-invariant optimal control problems. In *Proc. 10th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED2002, Lisbon, Portugal, 10 pp. (electronic)*, 2002. $\{ix,xi,9,88,145\}$

[272] D. F. M. Torres. Conserved quantities along the Pontryagin extremals of quasi-invariant optimal control problems. Research report CM02/I-01, Department of Mathematics, University of Aveiro, January 2002. Published, with minor changes, in the conference proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation – *MED2002* (invited paper). See [271]. $\{ix,xi,64,72,79,88\}$

[273] D. F. M. Torres. On optimal control problems which admit an infinite continuous group of transformations. In *Proc. 5th Portuguese Conference on Automatic Control, Controlo 2002, Aveiro, Portugal*, pages 247–251, 2002. $\{ix,xi,145\}$

[274] D. F. M. Torres. On optimal control problems which admit an infinite continuous group of transformations. Research report CM02/I-06, Department of Mathematics, University of Aveiro, March 2002. Published, with minor changes, in the conference proceedings of the 5th Portuguese Conference on Automatic Control – *Controlo 2002*. See [273]. $\{ix,xi,122\}$

[275] D. F. M. Torres. On the Noether theorem for optimal control. *European Journal of Control*, 8(1):56–63, 2002. $\{ix,xi,9,37,40,65,85,88,144\}$

[276] D. F. M. Torres. Regularity of minimizers in optimal control. In *Equadiff 10 CD ROM, Czechoslovak International Conference on Differential Equations and their Applications (Prague, Czech Repuplic, 2001)*, pages 397–412, Brno, 2002. Masaryk University Publishing House. $\{ix,xi,92,112,113,144\}$

[277] D. F. M. Torres. A remarkable property of the dynamic optimization extremals. *Investigação Operacional*, in press. $\{ix,xi,49\}$

[278] D. F. M. Torres. Carathéodory-equivalence, Noether theorems, and Tonelli full-regularity in the calculus of variations and optimal control. *Special Issue of the* J. of Mathematical Sciences, Submitted for publication. $\{ix,xi,144\}$

[279] D. F. M. Torres. Lipschitzian regularity of the minimizing trajectories for nonlinear optimal control problems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS)*, Submitted for publication. $\{ix,xi,92,113,144\}$

[280] D. F. M. Torres. Quasi-invariant optimal control problems. *Portugaliæ Mathematica*, Submitted for publication. {ix,xi,79,88}

[281] D. F. M. Torres and A. V. Sarychev. Lipschitzian regularity of minimizers for optimal control problems with control-affine dynamics. Research report CM/I-39, Department of Mathematics, University of Aveiro, July 1998. Published, with minor changes, in [217]. {ix,xi}

[282] D. F. M. Torres and A. V. Sarychev. Lipschitzian regularity of minimizers in the calculus of variations and optimal control. In *International Conference Dedicated to the 90th Anniversary of L. S. Pontryagin. Optimal Control*, pages 189–191, Moscow, 1998. Steklov Mathematical Institute, Moscow State (Lomonosov) University. {ix,xi,112}

[283] D. F. M. Torres and A. V. Sarychev. Lipschitzian regularity of minimizers for optimal control problems. In *Abstracts Second Nonlinear Control Network (NCN) Workshop (Nonlinear Control in the Year 2000)*, pages 101–102, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 2000. {ix,xi,112}

[284] A. Trautman. Noether equations and conservation laws. *Comm. Math. Phys.*, 6:248–261, 1967. Zbl 0172.27803 MR 36:3530 {62}

[285] E. Trélat. Some properties of the value function and its level sets for affine control systems with quadratic cost. *J. Dynam. Control Systems*, 6(4):511–541, 2000. Zbl 0992.11413 MR 1778212 {76}

[286] E. Trélat. Asymptotics of accessibility sets along an abnormal trajectory. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 6:387–414 (electronic), 2001. MR 2002c:49039 {119}

[287] A. I. Tretyak. Chronological calculus, high-order necessary conditions for optimality, and perturbation methods. *J. Dynam. Control Systems*, 4(1):77–126, 1998. Zbl 0947.49018 MR 99j:49043 {115}

[288] J. L. Troutman. *Variational calculus and optimal control*. Springer-Verlag, New York, 1996. Zbl 0865.49001 MR 96h:49001 {6,8}

[289] M. Valadier. Young measures. In *Methods of nonconvex analysis (Varenna, 1989)*, pages 152–188. Springer, Berlin, 1990. Zbl 0738.28004 MR 91j:28006 {119}

[290] A. van der Schaft. Symmetries and conservation laws for Hamiltonian systems with inputs and outputs: a generalization of Noether's theorem. *Systems Control Lett.*, 1(2):108–115, 1981/82. Zbl 0482.93038 MR 83k:49054 {45,62,63,64,65,76,85,88}

[291] A. J. van der Schaft. Symmetries, conservation laws, and time reversibility for Hamiltonian systems with external forces. *J. Math. Phys.*, 24(8):2095–2101, 1983. Zbl 0535.70022 MR 85a:58026 {45}

[292] A. J. van der Schaft. Symmetries in optimal control. *SIAM J. Control Optim.*, 25(2):245–259, 1987. Zbl 0616.49003 MR 88h:49007 {61,62,63,64,76,88}

[293] A. J. van der Schaft. Implicit Hamiltonian systems with symmetry. *Rep. Math. Phys.*, 41(2):203–221, 1998. Zbl 0921.70014 MR 2001d:37079 {45}

[294] R. Vinter. On the regularity of optimal controls. In *System theory: modeling, analysis and control (Cambridge, MA, 1999)*, pages 225–232. Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2000. Zbl 0978.49029 MR 2002e:49058 {4,91}

[295] R. Vinter. *Optimal control*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2000. Zbl 0952.49001 MR 2001c:49001 {5,8,37,91,122}

[296] R. B. Vinter and F. M. F. L. Pereira. A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories. *SIAM J. Control Optim.*, 26(1):205–229, 1988. Zbl 0647.49013 MR 89b:49029 {42,115}

[297] J. Warga. Relaxed variational problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 4:111–128, 1962. Zbl 0102.31801 MR 25:5415a {119}

[298] J. Warga. *Optimal control of differential and functional equations*. Academic Press, New York, 1972. Zbl 0253.49001 MR 51:8915 {119}

[299] J. Warga. Some selected problems of optimal control. In *Modern optimal control*, pages 389–407. Dekker, New York, 1989. Zbl 0685.49001 MR 91k:01012 {119}

[300] A. Weinstein. *Lectures on symplectic manifolds*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977. Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of North Carolina, March 8–12, 1976, Regional Conference Series in Mathematics, No. 29. Zbl 0406.53031 MR 57:4244 {40}

[301] M. Winter. Lavrentiev phenomenon in microstructure theory. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 06, approx. 12 pp. (electronic), 1996. Zbl 0853.49019 MR 97f:49015 {4}

[302] I. S. Yemelyanova. Some properties of Hamiltonian symmetries. In *European women in mathematics (Trieste, 1997)*, pages 193–203. Hindawi Publ. Corp., Stony Brook, NY, 1999. MR 2001k:37087 {60,73}

[303] L. C. Young. On approximation by polygons in the calculus of variations. *Proc. R. Soc. Lond.*, Ser. A 141:325–341, 1933. Zbl 0007.21302 {119}

[304] L. C. Young. Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations. *C. R. Soc. Sci. Varsovie*, 30:212–234, 1937. Zbl 0019.21901 {119}

[305] L. C. Young. Generalized surfaces in the calculus of variations. *Ann. of Math. (2)*, 43:84–103, 1942. Zbl 0063.09081 MR 3,249a {119}

[306] L. C. Young. Generalized surfaces in the calculus of variations. II. *Ann. of Math. (2)*, 43:530–544, 1942. Zbl 0063.08362 MR 4,49d {119}

[307] L. C. Young. *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory.* W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1969. Zbl 0177.37801 MR 41:4337 {1,2,6,9,94,119}

[308] L. C. Young. Remarks on some basic concepts of optimal control. In *Optimal control theory and its applications (Proc. 14th Biennial Sem. Canad. Math. Congr., Univ. Western Ontario, London, Ont., 1973), Part II*, pages 385–398. Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Vol. 106. Springer, Berlin, 1974. Zbl 0317.49046 MR 57:9149 {115}

[309] L. C. Young. Remarks and personal reminiscences. In *Modern optimal control*, pages 421–433. Dekker, New York, 1989. MR 90k:01025 {9}

[310] I. Zelenko. Nonregular abnormal extremals of 2-distribution: existence, second variation, and rigidity. *J. Dynam. Control Systems*, 5(3):347–383, 1999. Zbl 0959.58025 MR 2001d:49038a {119}

Índice Remissivo

D

E

K

L

M

Forma final da tese: 2/Abril/2002
Aceitação da tese pelo orientador: 18/Junho/2002
Entrega da tese nos Serviços Académicos da UA: 27/Junho/2002
Despacho de nomeação do Júri: 29/Julho/2002
Despacho de aceitação da tese pelo Júri: 21/Outubro/2002
Versão definitiva da tese: 31/Outubro/2002
Provas públicas e defesa da tese: 11/Novembro/2002